

Full-formulation の動的問題への適用と u-p formulation の適用限界の克服

名古屋大学 フェロー会員 ○野田 利弘
学生会員 豊田 智大

1. はじめに

飽和土の水～土骨格連成解析の支配方程式は、**u-p formulation** と呼ばれる体系に基づいて定式化されることが多い。ところが、この **u-p formulation** は、方程式系を単純化する過程で「間隙水の静的浸透」を仮定する手法であり、動的浸透も生じうる高透水性土に適用すれば計算は破綻する。そこで著者らは、もとの支配方程式を上述の静的浸透の仮定なしでそのまま解く Full-formulation¹⁾のうち、**u-w-p formulation** に基づく連成有限変形解析手法を新たに開発してきた。本稿では、まず **u-p formulation** の限界について示し、次いで Full-formulation を動的問題に適用することで、この限界を克服できることを示す。

2. 支配方程式

著者らは、**u-p formulation** に基づく土の動的／静的水～土骨格連成有限変形解析コード **GEOASIA**²⁾ の支配方程式を **u-w-p formulation** に基づいて新たに定式化した。**u-w-p formulation** の支配方程式を以下に示す。

$$\text{混合体の運動方程式} \quad \rho_s D_s \mathbf{v}_s + \rho_f D_f \mathbf{v}_f = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (1-a)$$

$$\text{液相の運動方程式} \quad \rho^f D_f \mathbf{v}_f = -\gamma_w \text{grad} h - \frac{\gamma_w}{k} \mathbf{w} \quad \left(h = z + \frac{u}{\gamma_w} \right) \quad (1-b)$$

$$\text{連成式} \quad \text{div} \mathbf{v}_s + \text{div} \mathbf{w} = 0 \quad (1-c)$$

ここに、 ρ^f 、 ρ^s 、 $\rho_f = n\rho^f$ 、 $\rho_s = (1-n)\rho^s$ 、 $\rho = \rho_s + \rho_f$ はそれぞれ間隙水と土粒子の真密度、固相と液相のみかけの密度、混合体の密度を表す、 D_s 、 D_f は固相、液相からみた物質時間微分、 \mathbf{v}_s 、 \mathbf{v}_f は固相、液相の速度、 $\mathbf{w} = n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$ は間隙水の相対平均流速、 \mathbf{T} は全応力テンソル、 \mathbf{b} は物体力、 h は全水頭、 n は間隙率、 k は透水係数、 γ_w は水の単位体積重量である。**u-w-p formulation** では未知数として固相速度 \mathbf{v}_s 、相対平均流速 \mathbf{w} 、間隙水圧 u の 3 つを考えるため (なお、 \mathbf{v}_f ではなく \mathbf{w} を採用するのは、不連続な間隙率場で \mathbf{v}_f もまた不連続となるため)、式中の液相速度 \mathbf{v}_f および液相加速度 $D_f \mathbf{v}_f$ は \mathbf{v}_s と \mathbf{w} を用いて書き換えてから離散化する。すなわち、

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s + \frac{\mathbf{w}}{n} \quad D_f \mathbf{v}_f = D_s \mathbf{v}_s + \frac{1}{n} D_s \mathbf{w} + \frac{1}{n} (\nabla \mathbf{v}_s) \mathbf{w} + \frac{1}{n^2} (\nabla \mathbf{w}) \mathbf{w} - \frac{1-n}{n^2} (\nabla \cdot \mathbf{v}_s) \mathbf{w} - \frac{1}{n^3} (\nabla n \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \quad (2)$$

一方、**u-p formulation** の支配方程式は

$$\text{混合体の運動方程式} \quad \rho D_s \mathbf{v}_s = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (3-a)$$

$$\text{連成式} \quad \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \text{div}(D_s \mathbf{v}_s) - \text{div} \mathbf{v}_s + \text{div}(k \text{grad} h) = 0 \quad (3-b)$$

と表される。これは、**u-w-p formulation** の支配方程式(1)に「間隙水の土骨格に対する相対加速度が土骨格の加速度に対して十分小さい」という、次の静的浸透の仮定を考慮することで得られる。

$$D_f \mathbf{v}_f - D_s \mathbf{v}_s \ll D_s \mathbf{v}_s \quad (4)$$

これにより、未知数を固相速度 \mathbf{v}_s 、間隙水圧 u の 2 つに縮約できるが、次節に示すような適用限界を有する。

3. u-p formulation の限界と Full-formulation (u-w-p formulation) の優位性について

u-p formulation の連成式(3-b)を、有限要素法による空間離散化と物理モデルの適用後、躍度 (加速度の時間変化率) に線形性を仮定して Wilson の θ 法により時間離散化すると、以下のような形の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \right) L \{ (\theta\Delta t)^3 D_s^2 \mathbf{v}_s \} \Big|_{t+\theta\Delta t} + (\theta\Delta t) H \{ u \} \Big|_{t+\theta\Delta t} \\ & = \{ (\theta\Delta t) f_u \} \Big|_{t+\theta\Delta t} + L \left[\{ (\theta\Delta t) \mathbf{v}_s \} \Big|_t + \left(1 - \frac{1}{\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \right) \{ (\theta\Delta t)^2 D_s \mathbf{v}_s \} \Big|_t + \frac{1}{6} \left(2 - \frac{3}{\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \right) \{ (\theta\Delta t)^3 D_s^2 \mathbf{v}_s \} \Big|_t \right] \quad (5) \end{aligned}$$

左辺第1項は土骨格の圧縮速度に、第2項は間隙水の排水速度に由来する部分であり、第1項下線部が正であれば、骨格の圧縮/膨張は排水/吸水を伴うこととなる。

$$\gamma_{\theta 1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w} > 0 \quad \therefore \frac{k}{\Delta t} < \frac{\theta\gamma_w}{3\rho^f} \quad (6)$$

ところが、 $\gamma_{\theta 1} < 0$ となる時、骨格の圧縮/膨張は排水/吸水を伴うという不合理な現象が解かれ、**u-p formulation**による計算は破綻する。この式より、**u-p formulation**による計算の可否が透水係数～時間刻み幅比 $k/\Delta t$ によって決まること、 k が大きい材料では Δt も大きくとる必要があることが分かる。つまり、Wilsonの θ 法を利用した**u-p formulation**では「高透水性土の動的問題」のような高い k と低い Δt の組合せの下での求解は困難であった。

4. 解析条件

表-1に示す均質様な2相系弾性体で構築される図-1の有限要素メッシュの底面に水平変位として正弦波を入力する。両側面には等変位境界を課した。また、自重は考慮せず、初期水圧は0とした。上面で水圧0の排水境界を与え、その他の面はすべて非排水とした。正弦波の振幅は $a = 1m$ 、角振動数は $\omega = 10rad/s$ とした。

5. 解析結果

複数の透水係数 k 、時間刻み幅 Δt の組合せに対して上述の解析を行い、陰解法のiterationが毎刻収束するか否かを、調べた範囲で図-2にチャートとしてまとめた。記号○・+はそれぞれ**u-p formulation**で計算可能・不能な条件であることを示す。また、赤線は式(6)の閾線に相当し、上側で計算不可能、下側で計算可能と判別される。同図より、解析結果が閾線近傍で計算可能域と不能域に分かれていることが確認できる。一方、**u-w-p formulation**による計算可能域○では閾線上側でも発散することなく計算を継続できており、これは**u-w-p formulation**による解析可能域の拡大を意味する。

また、角速度 ω を変えた解析により、**u-p formulation**により求解可能な透水係数～角速度の組を求めると、図-3が得られる。同図は、 k が大きくなるほど式(6)より Δt を粗くとる必要があり、 Δt が粗いほど高周波な波の解析が困難になることから、透水性が高いほど解析可能な角速度の上限が下がることを意味している。**u-w-p formulation**の適用により、 k によらず Δt を細かく設定できるため、この問題を克服することができる。また、 Δt を細かく設定することで、**u-p formulation**では解き得ない時間スケールでの現象が見えてくることもあるが、これは別報³⁾に譲る。

4. おわりに

u-p formulationでは不可能な高透水性・高周波の振動計算が**u-w-p formulation**では可能であることを示した。

謝辞 本研究は、科学研究費補助金（基盤研究(A)：課題番号25249064）の補助を受けて実施した。

参考文献

- 1) O. C. Zienkiewicz, et al.: Computational Geomechanics, John Wiley & Sons, pp.17-31, 1999. 2) Noda, T., et al.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, Soils Found, Vol.48, No.6, pp.771-790, 2008. 3) 豊田, 野田: Full-formulationに基づく超高透水性土の動的有限変形圧密解析, 第73回土木学会年次学術講演会, 2018 (掲載予定).

表-1 材料定数

Young's modulus E	10000 kN/m ²
Poisson's ratio ν	0.35
Initial porosity n_0	0.50
Density of soil particle ρ^s	2.65 g/cm ³
Density of water ρ^f	1.00 g/cm ³

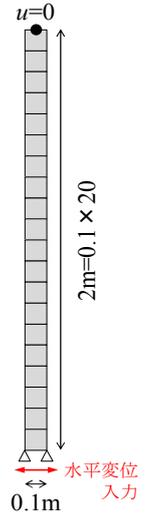


図-1 メッシュ

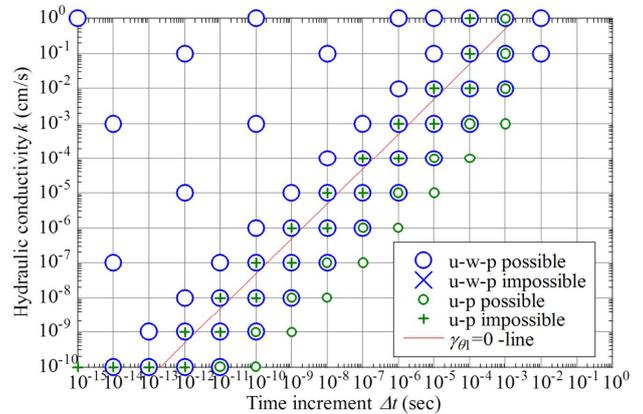


図-2 透水係数 k ～時間刻み幅 Δt 関係

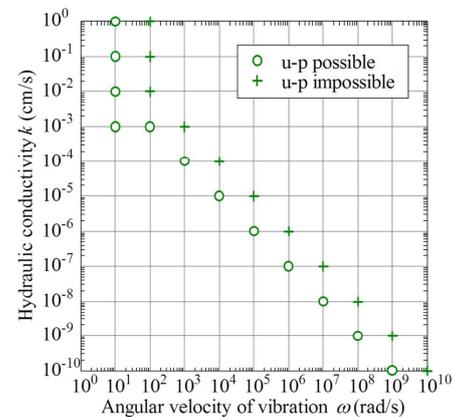


図-3 透水係数 k ～角速度 ω 関係