# 土の一次元動的弾性変形問題における *u-w-p* 支配方程式の減衰波動方程式への帰着と有限要素解析コードの Verification

水〜土骨格連成　動的変形　数値解析

名古屋大学　国際会員　○豊田 智大，野田 利弘

## 1. はじめに

混合体理論に基づく飽和土の水〜土骨格連成解析は，静的浸透を仮定する ***u-p*** formulation[1)]にとして定式化されることが多い．この ***u-p*** formulation の導入は方程式規模の削減に寄与するが，間隙水が動的にも運動しうる高透水性土への適用は著しく制限される．そこで著者らは，水〜土骨格連成解析の支配方程式を，静的浸透の仮定を導入することなく厳密に解く ***u-w-p*** formulation に基づいた有限変形有限要素解析コードを新たに開発し，***u-p*** formulation では求解困難な高透水性土の動的応答が求解可能となることを示してきた[2)]．また，この手法を土の一次元動的弾性変形問題に適用し，**図 1** に示す有限要素に一様に与えた初期過剰水圧の消散に伴う「圧密」を解くと，**図 2** の高透水性土における「非調和な振動を伴う沈下／水圧〜時間関係」や，**図 3** の解析初期の「鉛直荷重と即時水圧の不一致」とその透水係数非依存性が得られることを示してきた[3),4)]．本稿では，この問題における微小変形近似下での理論解導出過程で支配方程式が減衰波動方程式に帰着されること，その理論解が固有値に応じて性質の異なるモード（過減衰〜減衰振動）の重ね合わせで表現されることを示す．また，解析結果[3),4)]が理論解と良く整合すること（Verification）も示す．

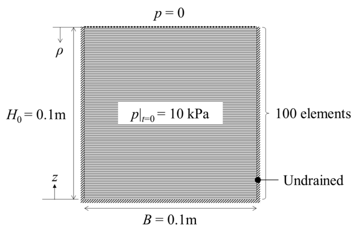
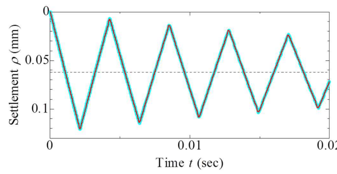
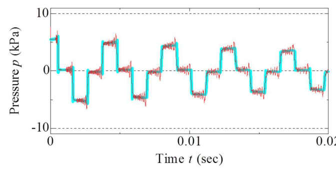



**図 1**　有限要素メッシュ




(a)　沈下〜時間関係




(b)　過剰間隙水圧〜時間関係

数値解析　理論解

**図 2**　高透水性土の振動現象

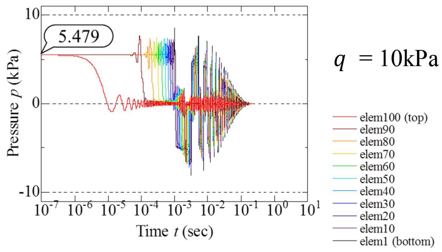



**図 3**　即時水圧 $p_I$ = 5.479kPa の出現

## 2. u-w-p 支配方程式の理論解の導出

**図 4**(a)に示すように，時刻 $t = 0$ において高さ$H_0$の地盤が鉛直荷重$q$により変形し，$t \to \infty$の極限で同図(b)の層厚$H$に至るまでの過程を解く．***u-w-p*** formulation の支配方程式は，一次元微小変形問題に対しては，固相変位 $u_s = u_s(z,t)$，液相変位 $u_f = u_f(z,t)$，過剰間隙水圧 $p = p(z,t)$ を未知関数とする以下の連立偏微分方程式で書ける．ただし，微小変形の仮定のため，間隙比は一定で，物質時間微分と空間時間微分を区別しない．自重および間隙率の圧縮性も考慮しない．

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = E_c \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z} \tag{1}$$

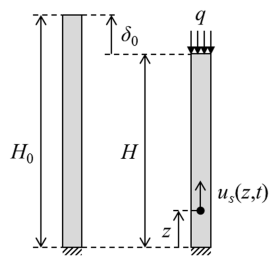
$$\rho^f \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma_w}{k} n \left( \frac{\partial u_f}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left( \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) + \frac{\partial u_s}{\partial t}\left\{ n \left( \frac{\partial u_f}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) \right\} = 0 \tag{3}$$

ここに，$\rho_s = (1-n)\rho^s$，$\rho_f = n\rho^f$，$\rho^s$，$\rho^f$はそれぞれ固相，液相，土粒子，間隙水の密度，$E_c = (1-\nu)E/(1+\nu)(1-2\nu)$，$E$はヤング率，$\nu$はポアソン比，$n$は間隙率，$k$は透水係数，$\gamma_w$は間隙水の単位体積重量である．境界条件，初期条件は鉛直荷重の「瞬間載荷」，片面排水（上端）を想定して以下のように与える．

$$u_s(0,t) = 0\,, \qquad \frac{\partial u_s(H,t)}{\partial z} = 0\,, \qquad u_f(0,t) = 0\,, \qquad p(H,t) = 0 \tag{4}$$

$$u_s(z,0) = \frac{\delta_0}{H} z\,, \qquad \frac{\partial u_s(z,0)}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial u_f(z,0)}{\partial t} = 0 \tag{5}$$




(a)　$t = 0$　　(b)　$t \to \infty$

**図 4**　一次元変形問題の初期値

**表 1**　材料定数

| | |
|---|---|
| Young's modulus $E$ | 10,000 kPa |
| Poisson's ratio $\nu$ | 0.35 |
| Initial porosity $n_0$ | 0.50 |
| Density of soil particle $\rho^s$ | 2.65 g/cm$^3$ |
| Density of pore water $\rho^f$ | 1.00 g/cm$^3$ |
| Permeability coefficient $k$ | $10^1$ cm/s |

ただし，座標$z$として**図 4**(b)の沈下収束時（時刻$t \to \infty$）の配置を基準にとり設定した$(0 \le z \le H)$．この理由を重力作用下で鉛直ばねに吊るされた質点の振動問題に喩えて云えば，質点に作用する重力とばねの復元力のつりあい位置（静的平衡状態）を原点にとると，座標設定により微分方程式の非斉次項を消去できるためである．これにより，一次元固相変位場 $u_s = u_s(z,t)$ の初期値は最終沈下量（静的変位量）を$\delta_0$として式(5)

---

Reduction of ***u-w-p*** governing equations in one-dimensional dynamic elastic deformation problems of soil to a damped wave equation, and a verification of a finite element analysis code. Toyoda, T. and Noda, T., Nagoya University.

第一式で与えられるとともに，無論 $u_s(z,\infty)=0$ となる．また，微小変形のため $H \simeq H_0$ である．ここで，独立変数$z$，$t$および未知関数群を$Z=z/H$，$T=c_v t/H^2$，$U_s=u_s/\delta_0$，$U_f=u_f/\delta_0$，$P=p/q$と無次元化すると，式(1)~(3)は，

$$\frac{G_s\mathrm{e}}{1+G_s\mathrm{e}}\frac{\partial^2 U_s}{\partial T^2}+\frac{\mathrm{e}^2}{1+G_s\mathrm{e}}\frac{\partial^2 U_f}{\partial T^2}=4h^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial Z^2}-4h^2\frac{\partial P}{\partial Z} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{e}^2}{1+G_s\mathrm{e}}\frac{\partial^2 U_f}{\partial T^2}=-4nh^2\frac{\partial P}{\partial Z}-4n^2h^2\left(\frac{\partial U_f}{\partial T}-\frac{\partial U_s}{\partial T}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial U_s}{\partial T}+\mathrm{e}\frac{\partial U_f}{\partial T}\right)=0 \tag{8}$$

となる．ここに，$Z$は相対深度，$T$は時間係数であり，

$$h=\frac{c_p H}{2c_v},\qquad c_p=\sqrt{\frac{E}{\rho'}},\qquad c_v=\frac{kE_c}{\gamma_w},\qquad \delta_0=\frac{qH}{E_c},\qquad \rho'=\rho_s+\frac{\rho_f}{\mathrm{e}^2},\qquad G_s=\frac{\rho^s}{\rho^f},\qquad \mathrm{e}=\frac{n}{1-n} \tag{9}$$

である．式(6)~(8)を連立し，未知変数を$U_s$に統一すると，

$$\rho'\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}+\frac{\gamma_w}{k}\frac{\partial u_s}{\partial t}-E_c\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial^2 U_s}{\partial T^2}+4h^2\frac{\partial U_s}{\partial T}-4h^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial Z^2}=0 \tag{10}$$

となる．式(10)のような形式で表される微分方程式は「減衰波動方程式」と呼ばれ，透水係数$k$が非常に大きい場合には左辺第二項が消滅して波動方程式になる．このことは，透水係数が大きいほど解が非減衰に近づく [3]ことと対応している．また，同式は無次元変位$U_s$が非減衰波速$c_p$，圧密係数$c_v$，層厚$H$から決まる無次元パラメータ$h$で決まることを意味する．さらに，左辺第一項の慣性項が無視できる場合は式中から$h$も消去され，同式は未知数が変位で与えられた三笠の圧密方程式になり，圧密度と時間係数の 1:1 関係が得られる．

上記の連立偏微分方程式を解くと，無次元変位$U_s$，無次元水圧$P$の理論解が以下のように導出される．

$$U_s(Z,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{\beta_n^2}\sin(\beta_n Z)\,F_n(T)\exp(-2h^2T) \tag{11}$$

$$P(Z,T)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{\beta_n}\cos(\beta_n Z)\,G_n(T)\exp(-2h^2T) \tag{12}$$

$$F_n(T)=\begin{cases}\dfrac{h+\sqrt{h^2-\beta_n^2}}{2\sqrt{h^2-\beta_n^2}}\exp\left(2h\sqrt{h^2-\beta_n^2}T\right)-\dfrac{h-\sqrt{h^2-\beta_n^2}}{2\sqrt{h^2-\beta_n^2}}\exp\left(-2h\sqrt{h^2-\beta_n^2}T\right) & (\beta_n<h)\\ 1+2h^2T & (\beta_n=h)\\ \cos\left(2h\sqrt{\beta_n^2-h^2}T\right)+\dfrac{h}{\sqrt{\beta_n^2-h^2}}\sin\left(2h\sqrt{\beta_n^2-h^2}T\right) & (\beta_n>h)\end{cases} \tag{13}$$

$$G_n(T)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{h^2-\beta_n^2}}\left[\begin{aligned}&-\left[\left(h+\sqrt{h^2-\beta_n^2}\right)+(1-\lambda_0)\left(h-\sqrt{h^2-\beta_n^2}\right)\right]\exp\left(2h\sqrt{h^2-\beta_n^2}T\right)\\ &+\left[(1-\lambda_0)\left(h+\sqrt{h^2-\beta_n^2}\right)+\left(h-\sqrt{h^2-\beta_n^2}\right)\right]\exp\left(-2h\sqrt{h^2-\beta_n^2}T\right)\end{aligned}\right] & (\beta_n<h)\\ -\lambda_0-2h^2(2-\lambda_0)T & (\beta_n=h)\\ -\lambda_0\cos\left(2h\sqrt{\beta_n^2-h^2}T\right)-(2-\lambda_0)\dfrac{h}{\sqrt{\beta_n^2-h^2}}\sin\left(2h\sqrt{\beta_n^2-h^2}T\right) & (\beta_n>h)\end{cases} \tag{14}$$

$$\beta_n=\frac{2n-1}{2}\pi,\qquad \lambda_0=\frac{1+\mathrm{e}}{1+G_s\mathrm{e}}=0.5479\ \ \text{（表 1 の場合）} \tag{15}$$

変位$U_s$，水圧$P$はともに，その解が複数のモードの重ね合わせで記述され，各モードの形態はその固有値$\beta_n$に応じて過減衰（$\beta_n<h$）から減衰振動（$\beta_n>h$）まで幅広く変化することがわかる．また，時刻$T\to+0$において$h$によらず一様に$P(Z,0)=\lambda_0 q$となることから，理論解は振動現象のみならず鉛直荷重と即時水圧の不一致をも説明している．

## 3. 減衰波動方程式の理論解と u-w-p formulation による解析結果の比較

***u-w-p*** formulation に基づく有限要素解析コードより得られた**図 2**(a)，(b)には，本稿で示した減衰波動方程式の理論解が併記されている．解析解は理論解とよく一致していることから，本稿での検討結果は既往の ***u-w-p*** formulation による解析手法の Verification として位置づけることができる [3), 4)]．

## 4. おわりに

***u-w-p*** formulation の支配方程式が一次元・微小変形近似下で減衰波動方程式の形に整理され，既往の解析結果がその理論解に一致することを示した．実は，鉛直荷重と即時水圧の不一致については，固相と液相をそれぞれ質点とみなした二質点系モデルとして求解することでその物理的意味を理解することができるが，この詳細などは別報に譲る．

**謝辞**　本研究の遂行にあたり，JSPS 科研費 17H01289 の助成を受けた．

参考文献）

1) Zienkiewicz, O. C., et al. (1999): Computational Geomechanics with special reference to Earthquake Engineering”, John Wiley &Sons, 17-52.
2) Noda, T. and Toyoda, T. (2019): Development and verification of a soil-water coupled finite deformation analysis…, *S&F*, **59** (4), 888-904.
3) 豊田，野田(2018): Full-formulation に基づく超高透水性土の動的有限変形圧密解析，土木学会第 73 回年次学術講演会, 741-742.
4) 豊田，野田(2019): 間隙水の慣性の影響を考慮した高透水性土の動的即時沈下解析，土木学会第 74 回年次学術講演会, III-554.