

# u-w-p formulation に基づく水～土骨格連成解析手法による高透水性土の即時沈下解析

u-w-p formulation 水～土骨格連成解析 高透水性

名古屋大学 学生会員 ○豊田 智大  
国際会員 野田 利弘

## 1. はじめに

飽和土の水～土骨格連成解析は、間隙水の浸透が静的に生じることを仮定する  $u-p$  formulation に基づいて定式化されることが多い。しかし、浸透が動的にも生じうる高透水性土に対してこの手法を適用すれば、仮定の破綻により計算が不能となる。そこで本稿では、この仮定を導入しない  $u-w-p$  formulation に基づいて新たに開発した水～土骨格連成解析手法の支配方程式の要諦を示すとともに、この手法を高透水性土の即時沈下問題に適用することで、 $u-p$  formulation では求解不能な問題が求解可能となることを示す。また、 $u-w-p$  formulation を適用し、間隙水の慣性を考慮して解析することで、沈下初期段階において沈下の時間遅れ現象が解かれることを示す。

## 2. u-w-p formulation に基づく支配方程式の要諦

混合体理論に基づく飽和土の力学は、各相の運動方程式と質量保存則を連立し、場の未知数である固相変位  $\mathbf{u}$ 、液相相対変位  $\mathbf{w}$ 、間隙水圧  $p$  を求める問題に帰着される。このとき、方程式系の定式化手法は Full-formulation (とくに  $u-w-p$  formulation<sup>1)</sup>) と呼ばれる。水～土骨格連成有限変形解析コードである **GEOASIA**<sup>2)</sup>は、上記の厳密な定式化に「液相の固相に対する相対加速度が固相の加速度に対して非常に小さい」という近似を導入することにより液相相対変位  $\mathbf{w}$  を消去して方程式系を縮小した  $u-p$  formulation に基づく定式化を採用している。この仮定により計算コストは削減されるが、間隙水の動的浸透を無視することとなるため、極めて透水性の高い地盤材料への適用は困難であった。

そこで筆者らは、上記の仮定を導入しない手法である  $u-w-p$  formulation に基づいて **GEOASIA** の支配方程式を再定式化し、間隙水の動的浸透を考慮可能な解析手法を新たに開発した。土骨格の変形現象と間隙水の浸透現象を up-dated Lagrange 法により刻々と追跡するため、 $u-w-p$  formulation に基づく場の未知数として固相変位速度  $\mathbf{v}_s$ 、液相相対変位速度  $\mathbf{w}$ 、間隙水圧  $u$  の3つをとり、これらを以下の方程式系を解くことで求める。

$$\text{混合体の運動方程式} \quad \rho_s D_s \mathbf{v}_s + \rho_f D_f \mathbf{v}_f = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (1)$$

$$\text{液相の運動方程式} \quad \rho^f D_f \mathbf{v}_f = -\text{grad} h - \frac{\gamma_w}{k} \mathbf{w} \quad (2)$$

$$\text{水～土骨格連成式} \quad \text{div} \mathbf{v}_s + \text{div} \mathbf{w} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\rho$ 、 $\rho_s$ 、 $\rho_f$ 、 $\rho^f$  はそれぞれ混合体、固相、液相、間隙水の密度、 $D_s$ 、 $D_f$  はそれぞれ固相、液相にからみた物質時間微分作用素、 $\mathbf{T}$  は全応力テンソル、 $\mathbf{b}$  は物体力、 $h$  は全水頭、 $k$  は透水係数、 $\gamma_w$  は間隙水の単位体積重量である。 $\mathbf{v}_f$  は液相変位速度であり、間隙水の相対速度  $\mathbf{w}$  と次の関係がある。

$$\mathbf{w} = n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \quad (4)$$

ここに、 $n$  は間隙率である。また、液相加速度  $D_f \mathbf{v}_f$  については、Lagrange 的に観測される固相物質点と同位置を占める液相物質点を Euler 的に観測するため、液相からみた物質時間微分  $D_f$  を固相からみた物質時間微分  $D_s$  に変換する際に生じる相対移流項を考慮して、次式で表す。

$$D_f \mathbf{v}_f = D_s \mathbf{v}_s + \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = D_s \mathbf{v}_s + \frac{1}{n} D_s \mathbf{w} + \frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{w} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{w} + \frac{1-n}{n^2} (\text{tr} D_s) \mathbf{w} + \frac{1}{n^3} (\text{grad} n \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \quad (5)$$

ここに、 $D_s$  は固相の速度勾配テンソルである。土骨格の構成式として亜弾性 Hooke 則を搭載するため、混合体の運動方程式(1)は固相に着目した物質時間微分  $D_s$  を作用させて速度型の方程式に変換した上で離散化する。このとき、客観性のある応力速度として Green-Naghdi rate を用い、公称応力速度は Yatomi et al. の表記法に従って与える<sup>3)</sup>。相間相互作用力は西村<sup>4)</sup>にならい Hagen-Poiseuille 流れの類推により与える。また、浸透現象の物理モデルとして Christian 流または田村流の物理モデルを拡張して用いる<sup>5)</sup>。時空間離散化には、各未知数に対して表 1 に示す方法をそれぞれ用いるが、その詳細は紙幅の都合上割愛する。

表 1 時空間離散化手法

未知数	時間離散化	空間離散化
固相変位速度 $\mathbf{v}_s$	四角形 4 節点 Iso-parametric 要素	躍度 $D_s^2 \mathbf{v}_s$ の線形性を仮定する Wilson- $\theta$ 法
液相相対変位速度 $\mathbf{w}$	四角形 4 節点 Iso-parametric 要素	躍度 $D_s^2 \mathbf{w}$ の線形性を仮定する Wilson- $\theta$ 法
間隙水圧 $u$	要素代表値 (有限体積法)	水圧速度 $D_s u$ の線形性を仮定する台形公式

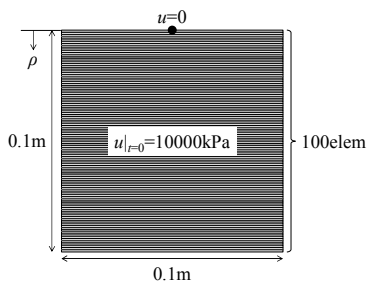


図1 有限要素メッシュ

表2 材料定数

Young's modulus $E$	10000 kN/m <sup>2</sup>
Poisson's ratio $\nu$	0.35
Porosity $n$	0.50
Density of soil particle $\rho^s$	2.65 g/cm <sup>3</sup>
Density of water $\rho^f$	1.00 g/cm <sup>3</sup>

### 3. 一次元弾性有限変形圧密解析

有限変形場における一次元弾性圧密を以下の3つの方法で解く.

- ① 有限差分法 (静的問題として1次元圧密方程式を解く)
- ②  $u-p$  formulation (**GEOASIA**, 土骨格の慣性を考慮して解く)
- ③  $u-w-p$  formulation (土骨格と間隙水の慣性を考慮して解く)

本稿では低透水性 ( $k=10^{-8}$ cm/s) および高透水性 ( $k=10^{-3}$ cm/s) の2種類の材料について解析を実施した. 解析に用いた有限要素メッシュを図1に示す. 瞬間荷重を想定して模型全体に初期水圧 10000kPaを与え, これが消散する過程での圧密沈下量  $\rho$  の推移を観察する. 材料定数は表2のとおり設定した.

**3-1. 低透水性土の解析結果** 低透水性材料の解析結果として, ①~③の解析手法により得られた沈下-時間関係を図2(a)に示す. 同図より,  $u-w-p$  formulationでの解析結果が, 差分法および  $u-p$  formulationの解と一致していることがわかる. この結果は, 低透水性条件において間隙水の運動は準静的におこり,  $u-p$  formulationにおける仮定が十分に妥当することを示している. 換言すれば,  $u-w-p$  formulationに基づく解析コードの Verification ができたことを意味している. また,  $u-w-p$  formulationでの解析結果として, 地表面での沈下速度および排水速度の推移を図2(b)に示す. 同図は, 沈下速度/排水速度が互いに大きさが同じで逆向きであって, その値は初期に最大値をとり次第に減少してゆくことを示している.

**3-2. 高透水性土の解析結果** 高透水性材料の解析結果として, 解析初期段階での沈下-時間関係を図3(a)に示す.  $u-p$  formulationでは, 解析開始直後, 地表面が隆起して解析が破綻する. これは, 透水係数が大きいときには仮定が破綻し, 連成式が「間隙水の吸水/排水に対応して土骨格の圧縮/膨張が生じる」という質量保存則に適合しない形式となるためである. 一方,  $u-w-p$  formulationでは破綻することなく沈下計算を継続できることから,  $u-w-p$  formulationの有効性が確認された. また, 差分法では計算開始後速やかに沈下し始めるが,  $u-w-p$  formulationでは沈下が始まるまでに遅延を生じ, 沈下-時間曲線はS字カーブになる. これは, 間隙水の慣性に起因して, 初期に静止していた間隙水が加速されて動き出すという動的効果によるものであって,  $u-w-p$  formulationによってのみ解析可能な現象である. 沈下速度・排水速度の推移を示した図3(b)もまた, 静止していた固相と液相が加速されたのち, ピーク到達後に収束してゆく様子を示している.

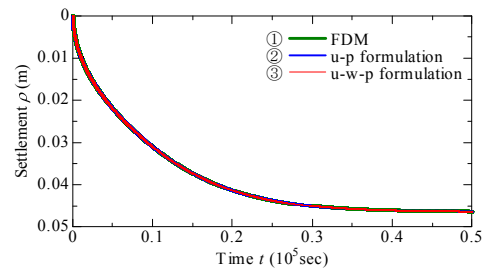
### 4. おわりに

本稿では一次元有限変形圧密解析を実施し,  $u-w-p$  formulationに基づく解析手法の検証を行うとともに,  $u-p$  formulationでは解析不能な問題が解けるようになること, 間隙水の慣性に起因して沈下に時間遅れが生じることを示し, 本手法の有効性を確認した. 今後は, 本手法を地震応答解析などに適用し, 動的問題に対する有効性を検討してゆく.

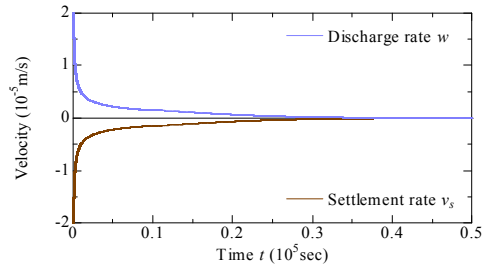
**謝辞** 本研究は科学研究費補助金 (基盤研究(A): 課題番号 25249064) の補助を受けて実施した.

#### 参考文献

- 1) O. C. Zienkiewicz et al. (1999): Computational Geomechanics with special reference to Earthquake Engineering, John Wiley & Sons, 17-31.
- 2) Noda, T. et al. (2008): Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion..., *S&F*, **48**(6), 771-790.
- 3) Yatomi, C. et al. (1989): General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *S&F*, **29**(3), 41-53.
- 4) 西村直志 (1999): (社)地盤工学会 地盤工学ハンドブック, 第3章土質力学, 51-64
- 5) Asaoka, A. et al. (1994): Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, *S&F*, **34**(1), 91-106.

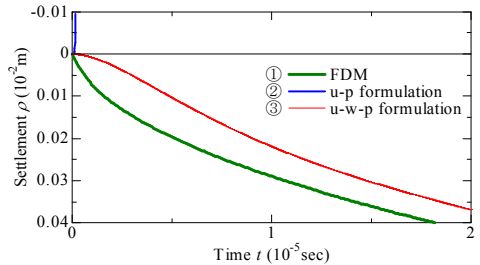


(a) 沈下-時間関係

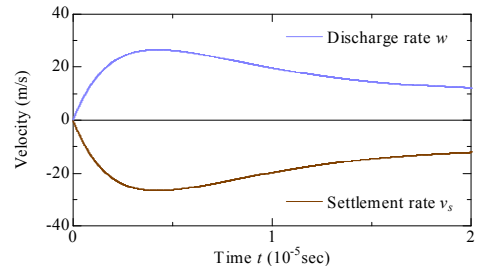


(b) 速度-時間関係 ( $u-w-p$  formulation)

図2 低透水性土の解析結果



(a) 沈下-時間関係



(b) 速度-時間関係 ( $u-w-p$  formulation)

図3 高透水性土の解析結果