

$u-w-p$ formulation に基づく水～土骨格連成有限変形解析コードの開発と検証
Development and verification of “ $u-w-p$ formulation”-based
soil-water coupled finite deformation analysis

豊田智大¹, 野田利弘²

1 名古屋大学大学院・工学研究科・toyoda.tomohiro@i.mbox.nagoya-u.ac.jp

2 名古屋大学・減災連携研究センター

概 要

飽和土の水～土骨格連成解析は、間隙水の静的浸透を仮定する $u-p$ formulation に基づいて定式化されることが多い。筆者らは、この仮定を導入しない $u-w-p$ formulation に基づく解析手法を新たに開発してきた。本稿では、振動の計算および高透水性土の即時沈下解析を通して、本手法の有効性を検証した結果を示す。

キーワード：水～土骨格連成解析, Full-formulation, $u-w-p$ formulation, 有限変形, 高透水性

1. はじめに

混合体理論に基づく飽和土の水～土骨格連成計算は、間隙水の静的浸透を仮定する $u-p$ formulation と、動的浸透も考慮する Full-formulation の 2 種類に大別される。著者らはこれまでに、Full-formulation (とくに $u-w-p$ formulation¹⁾) に基づく連成解析手法を新たに構築してきた。本稿では、本手法を振動問題および超高透水性土の圧密問題に適用した結果を示す。

2. $u-w-p$ formulation に基づく支配方程式の要諦と $u-p$ formulation の限界に関する考察

2.1 支配方程式

著者らは、 $u-p$ formulation に基づく土の動的/静的水～土骨格連成有限変形解析コード **GEOASIA**²⁾ を $u-w-p$ formulation に則って再定式化することで、間隙水の慣性を考慮した方程式系を新たに構築した。 $u-w-p$ formulation の支配方程式を以下に示す。

混合体の運動方程式

$$\rho_s D_s \mathbf{v}_s + \rho_f D_f \mathbf{v}_f = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (1)$$

液相の運動方程式

$$\rho^f D_f \mathbf{v}_f = -\gamma_w \text{grad} h - \frac{\gamma_w}{k} \mathbf{w} \quad \left(h = z + \frac{p}{\gamma_w} \right) \quad (2)$$

連成式

$$\text{div} \mathbf{v}_s + \text{div} \mathbf{w} = 0 \quad (3)$$

ここに、 ρ^f , ρ^s , $\rho_f = n\rho^f$, $\rho_s = (1-n)\rho^s$, $\rho = \rho_s + \rho_f$ はそれぞれ間隙水と土粒子の真密度、固相と液相のみかけの密度、混合体の密度を表す、 D_s , D_f は固相、液相からみた物質時間微分、 \mathbf{v}_s , \mathbf{v}_f は固相、液相の速度、 $\mathbf{w} = n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$

は間隙水の相対平均流速、 \mathbf{T} は全応力テンソル、 \mathbf{b} は物体力、 h は全水頭、 n は間隙率、 k は透水係数、 γ_w は水の単位体積重量である。 $u-w-p$ formulation では未知数として固相速度 \mathbf{v}_s , 相対平均流速 \mathbf{w} , 間隙水圧 p の 3 つを考えるため (なお、液相の運動を記述する変数として \mathbf{v}_f ではなく \mathbf{w} を採用するのは、不連続な間隙率場で \mathbf{v}_f もまた不連続となるため)、式中の液相速度 \mathbf{v}_f および液相加速度 $D_f \mathbf{v}_f$ は \mathbf{v}_s と \mathbf{w} を用いて書き換えてから離散化する。すなわち、

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s + \frac{\mathbf{w}}{n} \quad (4)$$

$$D_f \mathbf{v}_f = D_s \mathbf{v}_s + \frac{1}{n} D_s \mathbf{w} + \frac{1}{n} (\nabla \mathbf{v}_s) \mathbf{w} + \frac{1}{n^2} (\nabla \mathbf{w}) \mathbf{w} - \frac{1-n}{n^2} (\nabla \cdot \mathbf{v}_s) \mathbf{w} - \frac{1}{n^3} (\nabla n \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \quad (5)$$

一方、 $u-p$ formulation の支配方程式は

混合体の運動方程式

$$\rho D_s \mathbf{v}_s = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (6)$$

連成式

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \text{div}(D_s \mathbf{v}_s) - \text{div} \mathbf{v}_s + \text{div}(k \text{grad} h) = 0 \quad (7)$$

と表される。これは、 $u-w-p$ formulation の支配方程式(1)~(3)に「間隙水の土骨格に対する相対加速度が土骨格の加速度に対して十分小さい」という、次の静的浸透の仮定を考慮することで得られる。

$$D_f \mathbf{v}_f - D_s \mathbf{v}_s \ll D_s \mathbf{v}_s \quad (8)$$

これにより、未知数を固相速度 \mathbf{v}_s , 間隙水圧 p の 2 つに縮約できるが、2.3 に示すように高透水性材料への適用限界を有する。なお、式(3)右辺第 2 項は西村³⁾に倣い定式化した相間相互作用力である。構成式は歪弾性 Hooke 則とし、客観応力速度として Green-Naghdi rate⁴⁾を採用する。

2.2 時空間離散化

固相速度 \mathbf{v}_s および間隙水の相対平均流速 \mathbf{w} は有限要素法 (1 次の Iso-parametric 要素) により空間離散化し, 時間積分公式には躍度 (加加速度) 線形性を仮定する Wilson- θ 法を用いる²⁾。間隙水圧 p は有限体積法 (Christian 流または田村流の物理モデルの拡張適用^{5),6),7)} により空間離散化し, 時間積分公式には台形公式を用いる。

ここでは, 連成式についてのみ, 時空間離散化された支配方程式の具体形を示しておく。

(1) $\mathbf{u-w-p}$ formulation

式(3)の連成式を有限要素法で空間離散化する。

$$\mathbf{L}\{\mathbf{v}_s^N\} + \mathbf{L}\{\mathbf{w}^N\} = \mathbf{0} \quad (9)$$

ここに, $\{\mathbf{v}_s^N\}$, $\{\mathbf{w}^N\}$ は, それぞれ固相速度および液相速度の各節点での値を並べてできる係数列ベクトルである。

また, $\mathbf{L} = \int_v [\mathbf{B}_v] dV$ は要素の節点速度を体積変化率に変換する要素マトリクス, $[\mathbf{B}_v]$ は $\text{div } \mathbf{v} = [\mathbf{B}_v]\{\mathbf{v}^N\}$ と書いたときの形状関数の勾配を並べてできる行列である。Wilson- θ の時間積分公式を代入すれば,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \mathbf{L}\{(\theta\Delta t)^3 \ddot{\mathbf{v}}_s^N\}|_{t+\theta\Delta t} + \frac{1}{6} \mathbf{L}\{(\theta\Delta t)^3 \ddot{\mathbf{w}}^N\}|_{t+\theta\Delta t} \\ &= -\mathbf{L}\left[\{(\theta\Delta t)\dot{\mathbf{v}}_s^N\}|_t + \{(\theta\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{v}}_s^N\}|_t \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3}\{(\theta\Delta t)^3 \ddot{\mathbf{v}}_s^N\}|_t\right] \quad (10) \\ & -\mathbf{L}\left[\{(\theta\Delta t)\dot{\mathbf{w}}^N\}|_t + \{(\theta\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{w}}^N\}|_t \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3}\{(\theta\Delta t)^3 \ddot{\mathbf{w}}^N\}|_t\right] \end{aligned}$$

ここに, θ は Wilson- θ 法のパラメータ, Δt は時間刻み幅である。このように, $\mathbf{u-w-p}$ formulation では, 水~土骨格連成式中の相対平均流速 \mathbf{w} を直接有限要素法のみで離散化することができるため, 式の形は極めてシンプルになる。この定式化の場合, Christian・田村流の物理モデルは液相の運動方程式中で考慮されることとなる。

(2) $\mathbf{u-p}$ formulation

一方, $\mathbf{u-p}$ formulation の連成式(7)は, Laplace 方程式の左辺に相当する項 $\text{div}(k\text{grad}h)$ が出現するため, これの体積積分を Christian・田村流の有限体積法で離散化することとなる。

$$\left(\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \mathbf{L} + \mathbf{L}_b\right)\{\mathbf{v}_s^N\} - \mathbf{L}\{\mathbf{v}_s^N\} + \mathbf{H}\{p^E\} = \{\mathbf{f}_u\} \quad (11)$$

ただし, $\{p^E\}$ は間隙水圧の各要素代表値, \mathbf{H} および \mathbf{L}_b は $\text{div}(k\text{grad}h)$ の体積積分を有限体積法により空間離散化することにより出現する係数マトリクスであり, $\mathbf{H} > \mathbf{0}$ をみたす。また, $\{\mathbf{f}_u\}$ は既知の位置水頭を右辺に移項して得られる係数ベクトルである。時間積分公式を代入すれば,

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w}\right) \mathbf{L}\{(\theta\Delta t)^3 \ddot{\mathbf{v}}_s^N\}|_{t+\theta\Delta t} \quad (12) \\ & + (\theta\Delta t) \mathbf{H}\{p^E\}|_{t+\theta\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \{(\theta\Delta t)\dot{\mathbf{f}}_u\}|_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{L}\{(\theta\Delta t)\dot{\mathbf{v}}_s\}|_t \\ & + \left(1 - \frac{1}{\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w}\right) \mathbf{L}\{(\theta\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{v}}_s\}|_t \\ & + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w}\right) \{(\theta\Delta t)^3 \ddot{\mathbf{v}}_s\}|_t \end{aligned}$$

数値解析に際しては, まず計算の時刻 $t = t$ における諸量から $t = t + \theta\Delta t$ における諸量を離散化された支配方程式より陰的 (implicit) に求める。そして, $t = t$ における諸量と $t = t + \theta\Delta t$ における諸量から $t = t + \Delta t$ の諸量を更新してゆくことにより, あたかもその状態が基準配置であるかのように次々と変形を追跡してゆく (up-dated Lagrange 法)。 $t = t$ から $t = t + \theta\Delta t$ に時間を進める毎刻の初回の計算 (iteration する前) では, Noda et al.²⁾ に倣い, 時刻 $t = t + \theta\Delta t$ における各種状態量は Euler 法により陽的に予測することとした。また, 収束判定は各要素の各積分点 (Gauss 点) における相当応力の現 iteration の値について直前の iteration の値に対する絶対誤差を用いることとした。すべての積分点における相当応力の絶対誤差が十分に小さい場合に次の時間ステップに更新する。

2.3 $\mathbf{u-p}$ formulation の限界と Full-formulation の有効性

(1) $\mathbf{u-p}$ formulation で動的問題を解く場合

土骨格が動的に運動する場合 ($\dot{\mathbf{v}}_s \neq \mathbf{0}$) を考える。式(12)の左辺第1項の係数

$$\gamma_{\theta 1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \quad (13)$$

は, 透水係数~時間刻み幅比 $k/\Delta t$ が小さければ正值となるが, $k/\Delta t$ が大きければ負値となる。通常, $\gamma_{\theta 1} > 0$ であれば, 式(12)より「土骨格の圧縮/膨張に伴い間隙水が流出/流入する」現象が解かれるが, $\gamma_{\theta 1} < 0$ となった場合, 左辺第1項の符号反転により「土骨格の膨張/圧縮に伴い間隙水が流出/流入する」というあべこべの現象が解かれ, $\mathbf{u-p}$ 計算は求解不能に陥る ($\mathbf{u-p}$ formulation の限界²⁾)。すなわち, $\mathbf{u-p}$ formulation は①透水係数 k が大きい材料 (高透水性土) を解く場合, ②透水係数 k が比較的小きくても, Δt を小さくとらなければ観察され得ない急速または瞬間的な現象を解く場合には, 全く歯が立たない。ここで, $\gamma_{\theta 1} = 0$ は, (加速度項が有意に働く場合において) $\mathbf{u-p}$ formulation による計算可能領域と不可能領域を隔てる閾線を与えることから, 以後, この式を「 $\gamma_{\theta 1}$ 基準」と呼ぶ。

$\mathbf{u-p}$ 計算の安定条件 ($\gamma_{\theta 1}$ 基準)

$$\gamma_{\theta 1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w} > 0 \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{\Delta t} < \frac{\theta\gamma_w}{3\rho^f}$$

一方, 加藤満学位論文⁸⁾に倣い, Routh-Hurwitz の安定判別法により本スキームの安定性を検討することもできる。こちらは, 連成式だけでなく, 混合体の運動方程式も含めたシステムとしての安定条件を導くものであり, 時間離

散化された混合体運動方程式の rate-type および連成式と時間積分公式を連立漸化式の形で整理して得られる漸化式

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho^f k}{\gamma_w} & -1 & -\frac{k}{\gamma_w} w^2 \\ -\frac{1}{6}(\theta\Delta t)^2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\theta\Delta t) & 1 & 0 & 0 \\ (\theta\Delta t)x^2 & 0 & (\theta\Delta t) & -y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{n+1} \\ \dot{u}_{n+1} \\ \dot{u}_{n+1} \\ p_{n+1} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(\theta\Delta t)^2 & (\theta\Delta t) & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\theta\Delta t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_n \\ \dot{u}_n \\ \dot{u}_n \\ p_n \end{bmatrix} \\ & \left(\because \frac{M}{K} = x^2 \frac{L}{K} = y^2 \frac{H}{L} = w^2 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

の収束条件は、その特性方程式

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \lambda \\ -\frac{1}{6}(\theta\Delta t)^2 \lambda - \frac{1}{3}(\theta\Delta t)^2 & -(\theta\Delta t) \\ -\frac{1}{2}(\theta\Delta t) \lambda - \frac{1}{2}(\theta\Delta t) & \lambda - 1 \\ (\theta\Delta t)x^2 \lambda & 0 \\ & -\lambda & -\frac{k}{\gamma_w} w^2 \lambda \\ & \lambda - 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & (\theta\Delta t) \lambda & -y^2 \lambda + y^2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

に Routh-Hurwitz の安定判別法を適用して、

u - p 計算の安定条件 (Routh-Hurwitz 基準)

$$\frac{k}{\Delta t} < \frac{\theta \gamma_w}{9 \rho^f} \quad (17)$$

と得られる (詳細は紙幅の都合上割愛する)。 $\gamma_{\theta 1}$ 基準として導出した式(14)と比較すると、こちらの方がより厳格な条件となっていることがわかる。

(2) u - p formulation で準静的問題を解く場合

土骨格の運動が十分静的に生じる場合 ($\dot{\mathbf{v}}_s \approx \mathbf{0}$)、式(11)は左辺第 1 項が消滅して

$$-L\{\mathbf{v}_s^N\} + H\{p^E\} = \{f_u\} \quad (18)$$

となり、時間離散化しても

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6}L\{(\theta\Delta t)^3 \dot{\mathbf{v}}_s^N\}|_{t+\theta\Delta t} + (\theta\Delta t)H\{p^E\}|_{t+\theta\Delta t} \\ & = \{(\theta\Delta t)f_u\}|_{t+\theta\Delta t} + L\{(\theta\Delta t)\mathbf{v}_s\}|_t \\ & \quad + L\{(\theta\Delta t)^2 \dot{\mathbf{v}}_s\}|_t \\ & \quad + \frac{1}{3}\{(\theta\Delta t)^3 \dot{\mathbf{v}}_s\}|_t \end{aligned} \quad (19)$$

となるから、 $\gamma_{\theta 1}$ に相当する項は出現せず、あべこべな現象も生じ得ない。すなわち、準静的問題に限り、連成計算は透水係数によらず (上記の $\gamma_{\theta 1}$ 基準と無関係に) 無条件で安定する。

(3) u - w - p formulation で解く場合

u - w - p formulation では、連成式の原型を直接離散化した式(10)を解いているため、そもそも係数 $\gamma_{\theta 1}$ が出現しない。すなわち、 $\gamma_{\theta 1}$ のような解析可能範囲の限界は存在せず、 u - p formulation では破綻するような動的連成問題であっても難なく求解することが可能となる。

3. 振動問題

本章では、振動問題を u - p formulation および u - w - p formulation でそれぞれ解き、 u - p formulation による解析可能領域を明確に示すとともに、この外側に位置する u - p 計算不能域においても u - w - p formulation であれば解析が可能となることを示す。

3.1 解析条件

表 1 に示す均質様な 2 相系弾性体で構築される図 1 の有限要素メッシュの底面に水平変位として正弦波を入力する。両側面には等変位境界を課した。また、自重は考慮せず、初期水圧は 0 とした。上面で水圧 0 の排水境界を与え、その他の面はすべて非排水とした。正弦波の振幅は $a=0.1\text{m}$ とした。また、正弦波 1 周期の分割数を統一するため、角振動数 $\omega=10^2 \text{ rad/s}$ ($z \in \mathbb{Z}$) の波に対応する時間刻み幅を $\Delta t=10^{-2} \text{ sec}$ とした。

3.2 解析結果

複数の透水係数 k 、角速度 ω (時間刻み幅 Δt) の組合せに対して上述の解析を行い、陰解法の iteration が毎刻収束するか否かを、横軸を時間刻み幅 Δt 、縦軸を透水係数 k にとった図 2(a)のチャート上に調べた範囲でプロットした。記号 $\circ \cdot +$ はそれぞれ u - p formulation で計算可能・不能な条件であることを示す。また、赤色の破線は式(14)の $\gamma_{\theta 1}$ 基準に相当し、上側で計算不可能、下側で計算可能と判別される。同図より、解析結果がこの閾線近傍で計算可能域と不能域に分かれていることが確認できる。一方、赤色の実線は Routh-Hurwitz 安定判別法により導出される式(17)の閾線を表したものであるが、先の $\gamma_{\theta 1}$ 基準に対して、こちらの閾線の方が、 u - p 計算の可否をより正確に表していることが確認できる。

ただし、時間刻み幅 Δt が 10^{-3} cm/s より大きい範囲では、 $\gamma_{\theta 1}$ 基準線の上側でも解析が出来ることがわかる。これは、角速度 ω の小さい範囲 (時間刻み幅 Δt の大きい範囲) では、振動は超長周期であり、準静的問題と見做せるため、2.3(2)で考察したように、たとえ $\gamma_{\theta 1}$ 基準に抵触しても、あべこべの現象を生じないことに由来する。

一方、 u - w - p formulation による計算可能域 \circ では閾線上側でも発散することなく計算を継続できており、これは u - w - p formulation による解析可能域の拡大を意味する。

また、ある透水係数 k 、角速度 ω に対して、計算の可能な Δt が存在するかを示した図 2(b)が得られる。同図は、 k が大きくなるほど式(6)より Δt を粗くとする必要があり、 Δt が粗

表 1 材料定数と初期状態

Young's modulus E	10000 kN/m ²
Poisson's ratio ν	0.35
Initial porosity n_0	0.50
Density of soil particle ρ^s	2.65 g/cm ³
Density of pore water ρ^f	1.00 g/cm ³

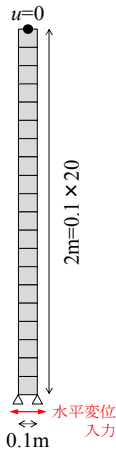


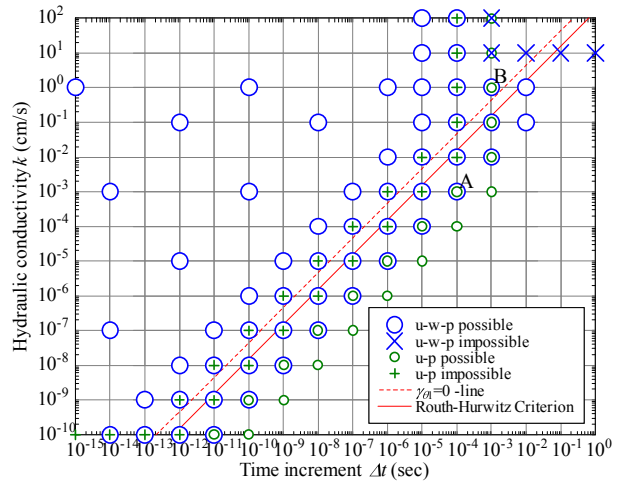
図 1 メッシュ (振動計算)

いほど高周波の解析が困難になることから、透水性が高いほど解析可能な角速度の上限が下がることを意味している。 $u-w-p$ formulation の適用により、 k によらず Δt を細かく設定できるため、この問題を克服することができる。

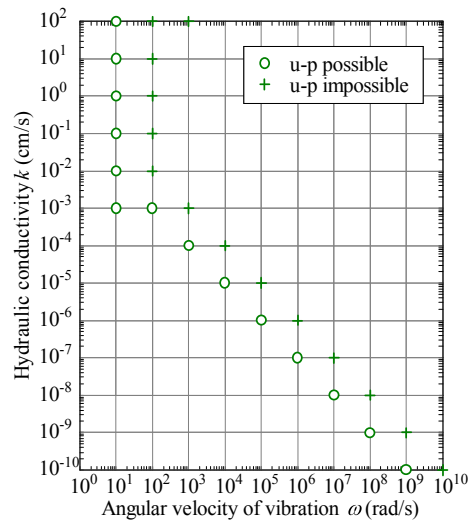
なお、図 2(a)の点 A、B は $u-p$ formulation、 $u-w-p$ formulation のいずれの方法でも解析可能な透水係数・時間刻み幅の組合せであるが、これらの条件に対して、角速度を $\omega=1\text{rad/s}$ に統一して解析すると、地表面の変位～時間関係および底面隣接要素の水圧～時間関係として図 3 および図 4 が得られる。同図のように、 $\gamma_{\theta 1}$ 基準下側の点 A では、沈下量・水圧ともに $u-p$ formulation と $u-w-p$ formulation で差が無い ($u-p$ 近似は妥当である) が、 $\gamma_{\theta 1}$ 基準近傍の点 B では、沈下～時間関係は一致するものの、水圧～時間関係は一致していない。このことから、準静的な問題で $\gamma_{\theta 1}$ 基準上側での $u-p$ 計算が一応実行できたとしても、厳密に空海できているとは限らない。なお、弾性体にせん断波を与えているにもかかわらず水圧を生じるのは歪弾性構成則に起因するが、ここでは詳細を割愛する。

4. 高透水性土の即時沈下問題

有限変形場における一次元弾性有限変形圧密問題を、 $u-w-p$ formulation で解く。ここでは、透水係数 k のオーダーを段階的に変えた場合に、どのような現象が解かれるかを観察する。透水係数が大きくなると圧密に要する時間は短くなってゆくが、それとともに、間隙水は動的に運動するようになり、 $u-w-p$ formulation によってのみ求解可能な、瞬間載荷直後にごく短時間で起こる現象を求解することができる。この種の問題は、透水係数 k の大きさのみならず、時間刻み幅を小さい場合でも計算できる Full-formulation によってのみ求解可能な現象である。



(a) 透水係数 k ～時間刻み幅 Δt 関係



(b) 透水係数 k ～角速度 ω 関係

図 2 振動計算の可否

4.1 解析条件

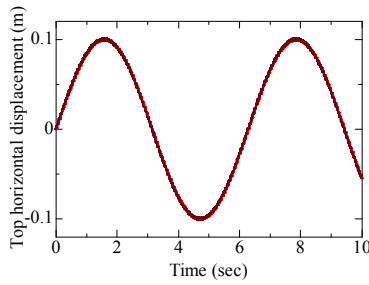
有限要素メッシュと弾性体の材料定数はそれぞれ図 5、表 2 のように設定する。ここでは、瞬間載荷に等価な初期条件として模型全体に初期水圧 100kPa を与え、これが消散する過程での圧密沈下量 ρ と模型中心における水圧 p の水位を調べた。

4.2 解析結果

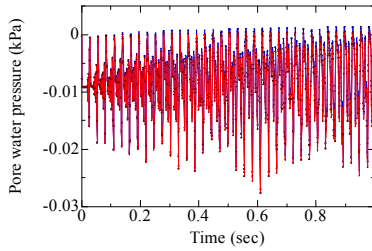
異なる透水係数 k に対する沈下-時間関係を図 6 に、中心深さにおける水圧-時間関係を図 7 に示す。

(1) 低透水性土 ($k < 10^{-4}\text{cm/s}$)

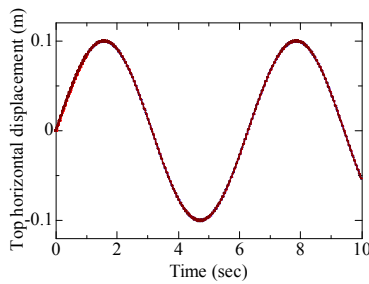
沈下～時間関係は図 6(a)のような下に凸なカーブとなり、1 次元静的有限変形圧密の理論解と一致する。このことは、低透水性土において土骨格と間隙水の運動は十分静的に起こり、慣性による効果は顕在化しないことを意味する。なお、この透水係数の範囲では $u-p$ formulation によっても同様の解を得ることができる。



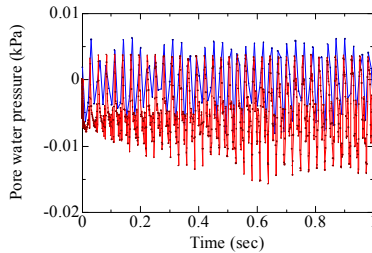
(a) 沈下～時間関係



(b) 水圧～時間関係
図3 解析結果 (点 A)



(a) 沈下～時間関係



(b) 水圧～時間関係
図4 解析結果 (点 B)

(2) 高透水性土 ($10^{-3}\text{cm/s} < k < 10^{-2}\text{cm/s}$)

沈下～時間関係は、図 6(b)のように大域的には下凸カーブに見えるが、間隙水の慣性に起因して、初期に静止していた間隙水が加速されてゆくため、沈下～時間関係は S 字カーブとなる。その後は透水係数の逆数に比例する相互作用力により間隙水の運動にブレーキがかかるため、間隙水の運動はやがて静的になり、沈下～時間関係もまた静的理論解に収束してゆく。なお、この問題を u - p formulation で解くと解析が破綻することから、 u - w - p formulation の有効性を確認しているが、詳細は割愛する。

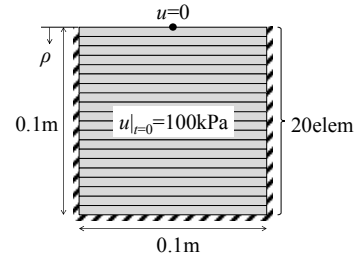


図1 メッシュ (圧密計算)

表 2 材料定数と初期状態

Young's modulus E	100000 kN/m ²
Poisson's ratio ν	0.35
Initial porosity n_0	0.50
Density of soil particle ρ^s	2.65 g/cm ³
Density of pore water ρ^f	1.00 g/cm ³

(3) 超高透水性土 ($10^{-1}\text{cm/s} < k$)

透水係数が非常に大きい場合、沈下～時間関係は図 6 (c)~(e)のような減衰振動となる。さらに、その中でも透水係数が小さいほど過減衰、大きいほど非減衰に近い応答を示している。

混合体の運動方程式(1)に液相の運動方程式(2)を代入し、連成式(3)より $\mathbf{v}_s + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ (1次元)であることを考慮しつつ、弾性体の構成式を簡潔に、 $\text{div}\mathbf{T} = -\mathbf{K}\mathbf{u}$ (\mathbf{u} : 骨格変位) とかくと、

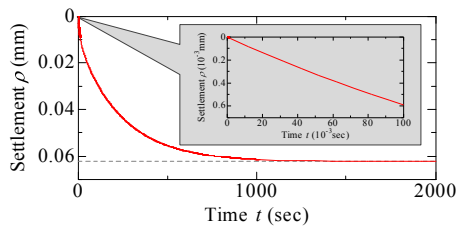
$$\rho_s D_s \ddot{\mathbf{u}} + \frac{n\gamma_w}{k} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \rho\mathbf{b} + n\gamma_w \text{grad}h \quad (20)$$

という骨格の運動に関する方程式が得られる。この方程式は減衰振動を表し、この中で相互作用力は骨格にとって粘性項の役割を果たすことがわかる。つまり骨格の運動は、透水係数が大きければ粘性項は小さくなるため過減衰に、透水係数が小さければ粘性項は大きくなるため非減衰に近づく。このことは解析結果にも符合する。図 7 の間隙水圧もまた同様の傾向を示す。

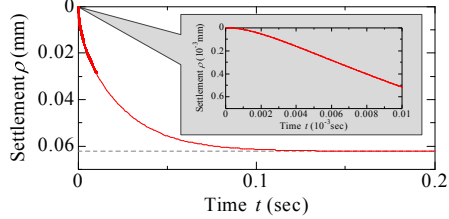
5. まとめ

本稿では、筆者らが新たに開発した u - w - p formulation に基づく水～土骨格連成解析手法を振動問題および高透水性土の即時沈下問題に適用し、以下の結論を得た。

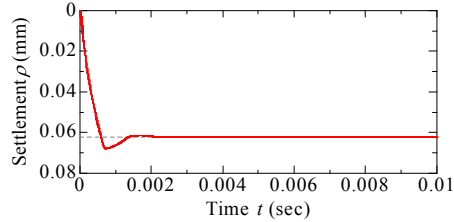
- u - p formulation による振動計算は、高透水性土 ($k \rightarrow$ 大) または高周波の振動 ($\Delta t \rightarrow$ 小) において破綻するが、 u - w - p formulation ではこのような破綻を来すことなく求解することが可能である (Validation)。
- u - p formulation による計算不能域は、水～土骨格連成問題が動的であり、かつ透水係数～時間刻み幅 $k/\Delta t$ の値が「閾値」を超過する範囲において生ずる。この「閾値」は、連成式の物理的考察から導かれる $\theta\gamma_w/3\rho^f$ ($\gamma_{\theta 1}$ 基準) のほかに、Routh-Hurwitz の安定判別法から誘導される $\theta\gamma_w/9\rho^f$ があり、後者の方が実際の振動計算の可否をより正確に表現している。



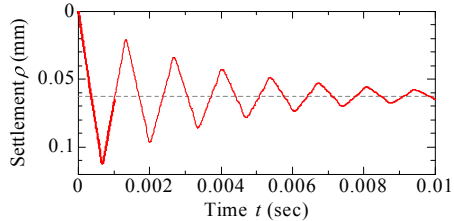
(a) $k=10^{-7}$ cm/s



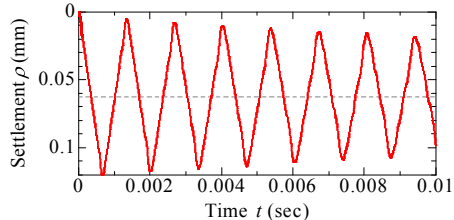
(b) $k=10^{-3}$ cm/s



(c) $k=10^{-1}$ cm/s

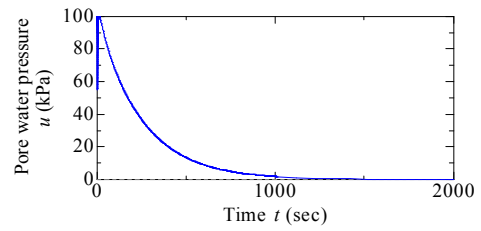


(d) $k=10^0$ cm/s

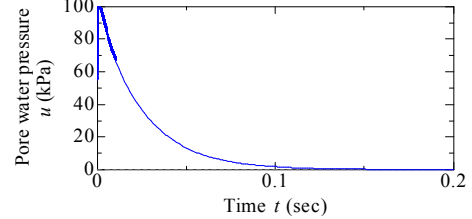


(e) $k=10^1$ cm/s

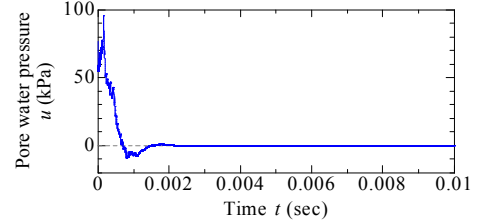
図6 沈下～時間関係



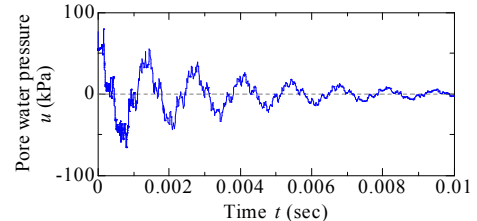
(a) $k=10^{-7}$ cm/s



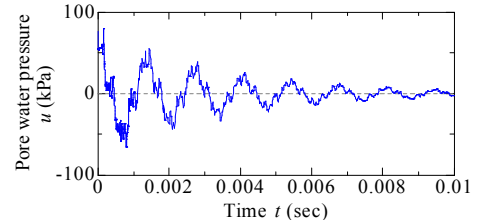
(b) $k=10^{-3}$ cm/s



(c) $k=10^{-1}$ cm/s



(d) $k=10^0$ cm/s



(e) $k=10^1$ cm/s

図7 水圧～時間関係

- 一次元弾性有限変形圧密問題を $u-w-p$ formulation で解くことで、沈下～時間関係が 1) 低透水性土では下に凸のカーブ、2) 高透水性土では S 字カーブ、3) 超高透水性土では減衰振動となることを示した。2) および 3) は $u-p$ formulation では求解不能な問題である (Validation)。

謝辞

本研究は科学研究費補助金（基盤研究(A)：課題番号 17H01289）の補助を受けて実施した。

参考文献

- Zienkiewicz, O. C., Chan, A. H. C., Pastor, M., Schrefler, B. A. and Shiomi, T.: Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering, John Wiley & Sons, pp.17-36, 1999.

- Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, Soils and Foundations, Vol.48, No.6, pp.771-790, 2008.
- 西村直志：第3章土質力学，地盤工学ハンドブック，pp.51-64，地盤工学会，1999.
- Green, A. E. and Naghdi, P. M.: A general theory of elasto-plastic continuum, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.18, pp.251-281, 1965.
- Christian, J. T.: Undrained stress distribution by numerical method, Proceedings of ASCE, Vol.94, SM6, pp.1331-1345, 1968.
- 赤井浩一，田村武：弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析，土木学会論文集，第269号，pp.95-104，1978.
- Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, Soils and Foundations, Vol.34, No.1, pp.91-106, 1994.
- 加藤満：多次元液状化解析法とその応用に関する研究，岐阜大学学位論文，1995.