

# 調和外力による飽和土の一次元強制振動に対する u-w-p 解析に基づいた u-p 近似解法の再評価と u-w-p 定式化の優位性

Evaluation of  $u-p$  approximate solution based on  $u-w-p$  analysis  
and superiority of  $u-w-p$  formulation in one-dimensional oscillation problem  
of saturated soil under harmonic load excitation

豊田智大<sup>1)</sup> 野田利弘<sup>2)</sup>  
Tomohiro Toyoda and Toshihiro Noda

<sup>1)</sup>博(工)名古屋大学 工学研究科 助教 (〒464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: toyoda@civil.nagoya-u.ac.jp)

<sup>2)</sup>博(工)名古屋大学 工学研究科 教授 (〒464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: noda@civil.nagoya-u.ac.jp)

An oscillation problem of a one-dimensional saturated elastic soil column was solved with vertical load excitation based on  $u-p$  and  $u-w-p$  formulations. Applicable ranges of  $u-p$  and  $u-w-p$  formulations were investigated changing permeability coefficient  $k$ , angular velocity  $\omega$ , and time increment  $\Delta t$ . As a result, we confirmed the versatile applicability of  $u-w-p$  formulation at the outside of the applicable range of  $u-p$  formulation. Especially,  $u-w-p$  formulation solved the inertia-induced phenomena (i.e. transition/resonance response for highly-permeable soil and inconsistent amplitude of pore water pressure at the high-frequency range). Furthermore,  $u-w-p$  calculation with a set of condition leading to failure of the  $u-p$  calculation tended to cause (a) unignorable magnitude of relative acceleration, (b) significant violation of  $u-p$  assumption, and (c) indispensable magnitude of relative convective term.

**Key Words** : soil-water coupling,  $u-w-p$  formulation, high-permeability, relative convection

## 1. はじめに

地盤の水～土骨格連成解析は、間隙水の静的浸透（浸透加速度が土骨格の加速度に対して十分に小さいこと）を仮定する  $u-p$  formulation（以後、単に  $u-p$  と記す）に基づいて定式化されることが多い。この静的浸透の仮定は、次式で表現される。

$$D_f v_f - D_s v_s \ll D_s v_s \quad (1)$$

ここに、 $D_s$ 、 $D_f$  はそれぞれ固相および液相からみた物質時間微分、 $v_s$ 、 $v_f$  は固相および液相の速度を表す。静的浸透の仮定の導入により方程式系の簡略化が可能となるが、その代償として、間隙水の動的浸透を伴う高透水性土の水～土連成問題を解くことは困難となる。そこで著者らは、上記の仮定を導入することなく、水～土連成問題の支配方程式を直接離散化して解く  $u-w-p$  formulation（以後、単に  $u-w-p$  と記す）に基づく水～土骨格連成有限変形解析手法を開発し、その verification を行うとともに [1]、間隙水の慣性に起因して生じる諸現象について数値解析的に明らかにしてきた [2]。

ところで、 $u-p$  計算の可否は、以下の  $\gamma_{\theta 1}$  の値の正負により判別できる可能性が示されている [3]。

$$\gamma_{\theta 1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \quad (2)$$

ここに  $\gamma_{\theta 1}$  は、離散化された  $u-p$  形式の水～土骨格連成式の固相ストレッチング項の係数に相当し、通常は正值をとるが、透水係数  $k$  が大きい、または時間刻み

幅  $\Delta t$  が小さいときには負に転じる。このとき、方程式系が不安定化し、解が発散することとなる。つまり、式 (1) の成立を直接確認することなく、 $u-p$  計算の可否を簡便に予測することができる。

本研究では、動的問題を例にとり、 $u-p$  の計算可否について、透水係数と時間刻み幅を変えつつ確認するとともに、 $u-w-p$  によりその適用限界が克服されることを示す。さらに、 $u-w-p$  に基づく  $u-p$  適用域外の計算では、慣性項の卓越に起因する特徴的な現象が解かれることを示す。また、 $u-p$  解と  $u-w-p$  解の比較を通して、 $\gamma_{\theta 1}$  が正であっても  $u-p$  解と  $u-w-p$  解が一致しない領域が存在することを示すとともに、 $u-p$  計算が破綻する条件での  $u-w-p$  解が、(a) 無視できない相対加速度の発生、(b)  $u-p$  近似の破綻、および (c) 固相加速度と同程度以上の相対移流項の発生を伴うことを示す。

## 2. 解析条件

解析には図-1 の一次元有限要素メッシュを用意する。材料は二相系飽和弾性体とし、その上端に鉛直調和外力  $q(t) = q_0 \sin \omega t$  ( $q_0 = 10\text{kPa}$ ) を作用させる。材料は飽和弾性体とし、一次元圧縮波の伝播を解く。

本解析では、自重は考慮しないものとし、初期水圧は  $p|_{t=0} = 0$  とした。土骨格の境界条件については、底面鉛直変位ならびに全節点における水平変位を固定した（一次元変形）。間隙水の境界条件については、片面排水条件を想定し、模型上端で間隙水圧  $p = 0$  を与え、その他の面では非排水条件（底面で  $w_y = 0$ 、側面

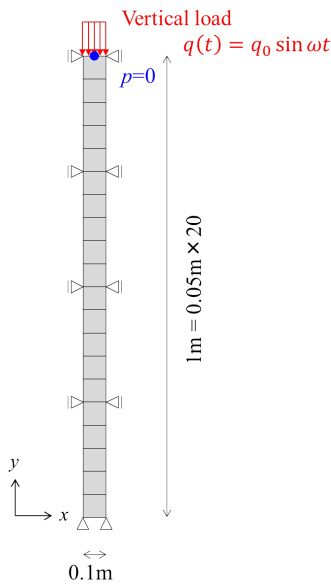


図-1 有限要素メッシュ

で  $w_x = 0$ ) を与えた。

上記の解析を、透水係数  $k$ 、調和外力の角速度  $\omega$ 、時間刻み幅  $\Delta t$  の組み合わせ  $(k, \omega, \Delta t)$  を変えながら系統的に実施した。ただし、正弦波一周期の分割数を統一するため、角速度を  $\omega = 10^2 \text{ rad/s}$  とするとき、時間刻み幅を  $\Delta t = 10^{-z-2} \text{ sec}$  とした ( $z$  は実数、本稿では  $-13 \leq z \leq -2$  の範囲で変化させた)。このとき、一周期の分割数は  $200\pi$  となる。構成式には非弾性 Hooke 則を用い、その材料定数を表-1 のとおり設定した。

表-1 等方弾性体の材料定数

Young's modulus $E$ (MPa)	10
Poisson's ratio $\nu$	0.30
Initial porosity $n_0$	0.50
Density of soil particle $\rho^s$ ( $\text{g/cm}^3$ )	2.65
Density of pore water $\rho^f$ ( $\text{g/cm}^3$ )	1.00

### 3. 解析結果

上記の解析を  $u-p$  および  $u-w-p$  により実施し、計算の可否を調べた結果を図-2 に示す。

### 4. $u-p$ と $u-w-p$ の適用可能域の比較

あるパラメータセット  $(k, \omega, \Delta t)$  に対し、 $u-p$  計算が収束したか否かを図-2 に緑色の記号で示す。○および△は  $u-p$  計算が収束したことを、+ は発散したことを表す。図中の赤色の破線は  $\gamma_{\theta 1}$  基準 ( $\gamma_{\theta 1} = 0$ ) であり、この上側の領域では  $\gamma_{\theta 1} < 0$  となり、 $u-p$  計算不可と判定される。同図より、 $u-p$  計算の可否は  $\gamma_{\theta 1}$  基準により概ね判別できることが確認された。なお、同図中の赤色の実線は加藤 [4] に倣い誘導した Routh-Hurwitz 安定判別法による閾線であるが、こちらの方が  $\gamma_{\theta 1}$  基準よりも実際の  $u-p$  計算の可否を良く表現している。

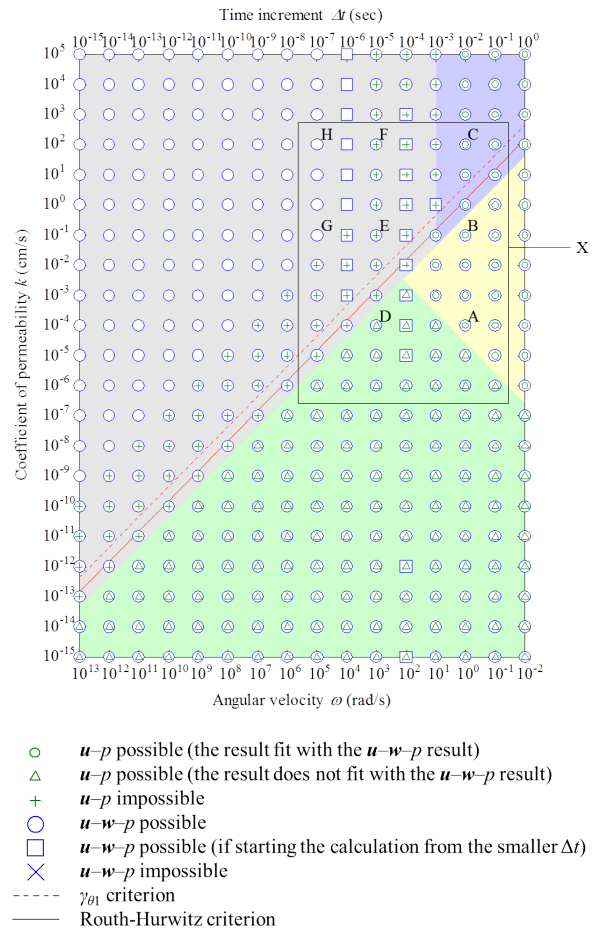


図-2  $u-p$  および  $u-w-p$  の適用可能域

しかしながら、 $\gamma_{\theta 1}$  基準による判定には、いくつかの例外が存在する。図中の青色の領域 ( $\omega < 10^0 \text{ rad/s}$ , 低周波域) においては、 $\gamma_{\theta 1} > 0$  であるにも関わらず、 $u-p$  計算は収束した。これは、 $\omega$  が十分大きい準静的な条件の下では、符号反転による計算の破綻を生じないことによる。一方、 $u-p$  の解析可能域においても、図中の黄色の領域 (○) では  $u-p$  と  $u-w-p$  で解が一致が確認されたが、緑色の領域 (△) においては、 $u-p$  計算は収束こそするものの、 $\gamma_{\theta 1} > 0$  であるにもかかわらず、 $u-w-p$  とは異なる結果となった (5. で後述)。これは、式 (1) の静的浸透仮定を満足することと、連成式において符号逆転を生じないこと ( $\gamma_{\theta 1} > 0$ ) が別の事項であることを意味している。換言すれば、 $\gamma_{\theta 1}$  基準を満足するからといって、 $u-p$  解が  $u-w-p$  解に一致する保証はなく、 $u-p$  解が正しい解を与えていたか否かは  $u-w-p$  計算と比較して初めて判定できるといえる。

これに対し、 $u-w-p$  では、 $k/\Delta t$  によらず、青色のプロット ○ で示されるあらゆる条件に対して、破綻することなく計算を継続可能であった。□ においては  $u-w-p$  計算も不安定化したが、これは  $t = 0$  において静止柱に突然正弦調和外力を入力したためであって、これを捉えるために (1 オーダー) 小さい  $\Delta t$  から計算を開始すれば、その後は  $\Delta t$  を元に戻しても発散することなく計算を継続できることを確認している。以上のことが

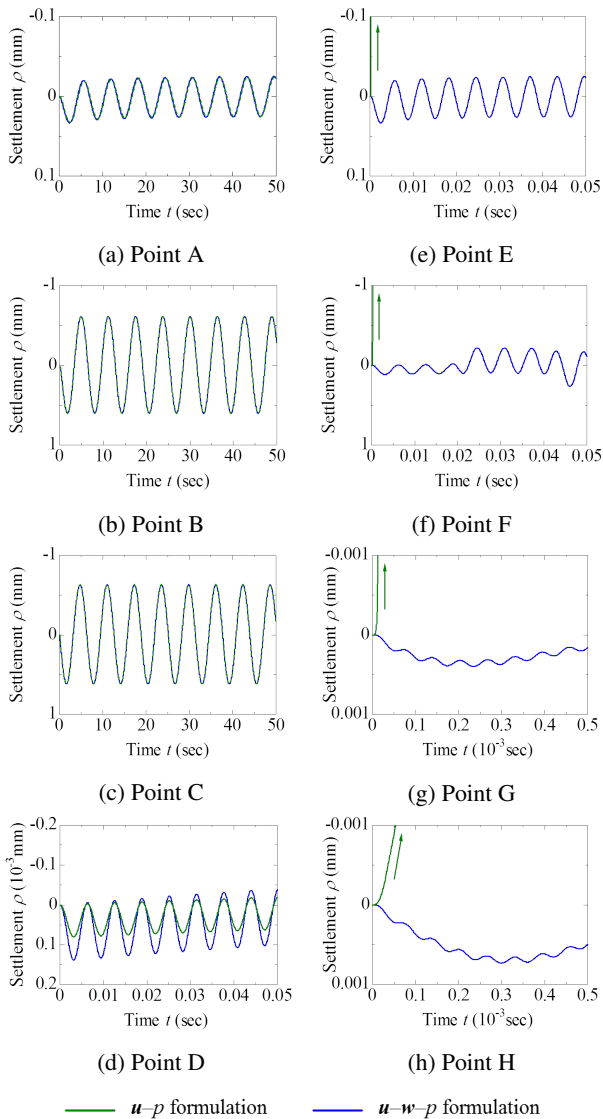


図-3 沈下～時間関係

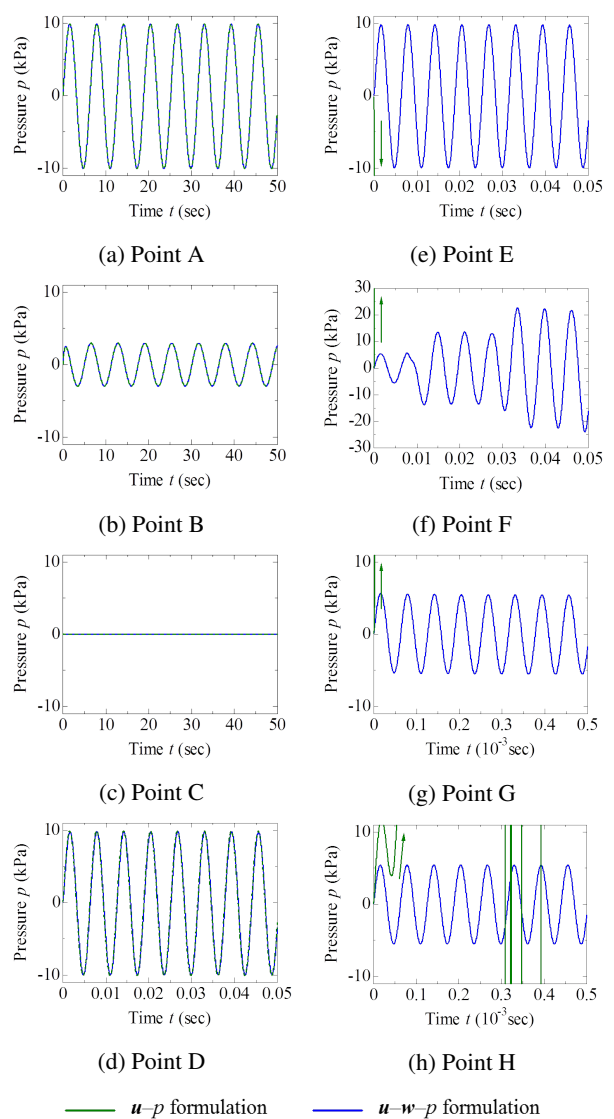


図-4 水圧～時間関係

ら、 $u-w-p$  が透水係数や時間刻み幅によらず適用可能な汎用性の高い解析手法であることが確認された。

### 5. $u-w-p$ 解にみられる $u-p$ 計算不能域での慣性に起因する諸現象の発生

次に、 $u-w-p$  による解析解について、 $u-p$  解と比較しつつ確認してゆく。図-2 に示す A~H の八条件について、上端の節点における沈下～時間関係ならびに下端の要素における水圧～時間関係を図-3-4 に示す。

#### (1) 条件 A-B

図-2 において  $\gamma_{\theta 1}$  基準の下側、黄色の領域に位置する点 A-B においては、図-3 の沈下～時間関係、図-4 の水圧～時間関係ともに  $u-p$  解と  $u-w-p$  解は完全に一致しており、このことから、この領域においては  $u-p$  近似が十分に妥当することがわかる。

#### (2) 条件 C

点 C は  $\gamma_{\theta 1}$  基準上側に位置するものの、 $u-p$  計算は実行可能であり、その解は  $u-w-p$  解に一致した。これは、図-4(c) のように、角速度  $\omega$  の値が十分小さく、また、非常に大きい透水係数  $k$  の下で動水勾配が常に解

消されるため（完全排水条件下）、固液両相の加速度をほとんど生じることなく、十分静的に変形が進行したことによる。

#### (3) 条件 D

条件 D を含む緑色の領域においては、 $u-p$  計算を発散することなく継続可能であるが、図-3(d) で得られた沈下～時間関係は  $u-w-p$  解とは一致しない。ただし、低透水・高周波条件の下で、非排水的に変形が進行するため、振幅～時間関係の振幅は他条件と較べて小さくなる。また、水圧～時間関係の振幅は、図-4(d) のように境界荷重振幅（10kPa）にほぼ一致する。

#### (4) 条件 E-H

点 E-H の条件に対しては、 $u-p$  計算は発散するが、 $u-w-p$  では計算を継続できている。

$u-w-p$  解について、特に点 F においては、調和外力の作用による過渡応答の発生が解かれており、図-4(f) の水圧～時間関係の振幅は調和外力振幅  $q_0=10\text{kPa}$  を超える結果となった。そこで、本問題の微小変形仮定時の変位の定常応答の理論解より、片面排水条件下での

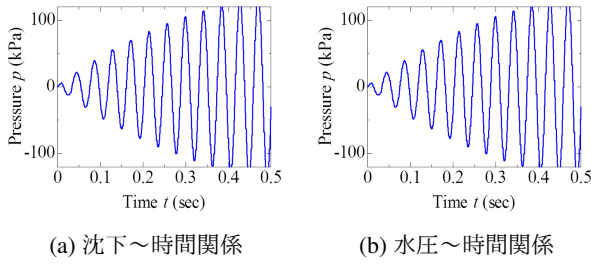


図-5 一次モードの強制調和外力作用時の応答 ( $u-w-p$ )

飽和土柱の  $n$  次の固有角速度が

$$\omega_n = 2h \sqrt{\beta_n^2 - 2h^2} \frac{c_v}{H^2} \quad (3)$$

(ただし,  $\beta_n = (2n-1)\pi/2$ ,  $h = c_p H/2c_v$ ,  $c_p = \sqrt{E_c/\rho'}$ ,  $c_v = kE_c/\gamma_w$ ,  $\rho' = \rho_s + \rho_f/e^2$ ,  $E_c = (1-\nu)E/(1+\nu)(1-2\nu)$ ,  $H$  は層厚,  $\gamma_w$  は水の単位体積重量,  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  は固相および液相のみかけの密度,  $e$  は間隙率) と表されることを踏まえ, 調和外力の外力を一次の固有角速度  $\omega_1$  と一致させたところ, 図-5 のように, 沈下~時間関係, 水圧時間関係における共振による増幅が解かれることが確認された (verification). このような現象は, 二相系連成問題の理論解 (減衰波動方程式) が減衰振動を示す場合にのみ生じるものであり (文献 [2] を参照), 高透水性土においてのみ解かれうる現象であるといえる.

点 E, F よりさらに角速度の大きい点 G, H の条件 ( $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ , 高周波域) においては, 水圧振幅は外圧振幅  $q_0=10\text{kPa}$  とは一致せず,  $5.479\text{kPa}$  となった. この値は, 一次元飽和土柱に対し非圧縮条件下で瞬間的に荷重  $q_0$  を作用させたときの水圧の理論解

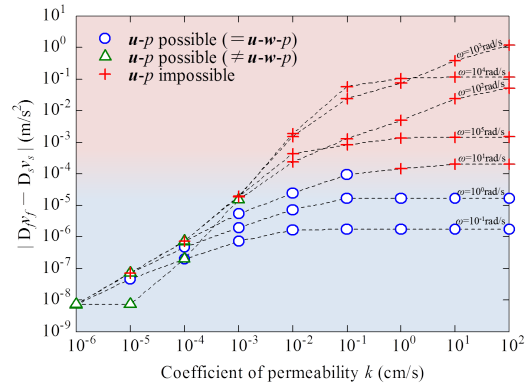
$$p_I = \frac{1+e}{1+G_{se}} q_0 = 5.479\text{kPa} \quad (4)$$

に一致する (verification). これは, 瞬間荷重作用直後に外力が間隙水圧のみではなく固液各相の慣性力によっても分担されることで水圧の荷重分担率が低減することによるものであるから, 間隙水の慣性を考慮可能な  $u-w-p$  を用いて高透水性土・高周波領域の問題を解いた場合にのみ解かれうる現象であるといえる.

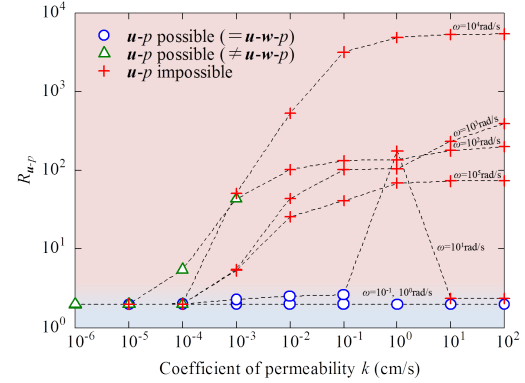
## 6. $u-p$ 計算の可否と相対加速度・相対移流項の大きさの関係

4. - 5. においては, 点 C のように  $\gamma_{\theta 1}$  基準上側においても低周波域であれば求解可能であることを確認するとともに, 点 D のように  $\gamma_{\theta 1}$  基準下側においても低透水・高周波領域においては  $u-p$  解と  $u-w-p$  解が一致しないなど,  $\gamma_{\theta 1}$  基準を満足すること (水~土連成式の符号反転を生じないこと) と  $u-p$  の静的浸透仮定が妥当すること ( $u-p$  と  $u-w-p$  解が一致すること) は本質的に同一ではないことが示唆された.

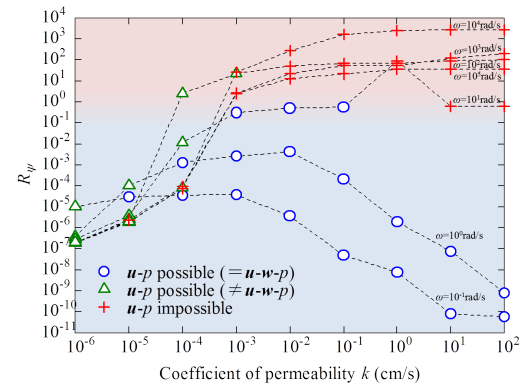
そこで,  $u-p$  計算の可否が何によって決まるのかを明らかにするため, 下記の三種類の指標を用意し, その上端節点における値を  $u-w-p$  計算により求め,  $u-p$  計算の可否とともに図-6 にまとめた.



(a) 相対加速度  $D_f v_f - D_s v_s$  の大きさの最大値



(b) 指標  $R_{u-p}$



(c) 指標  $R_\psi$

図-6  $u-p$  計算の可否と  $u-w-p$  計算により求めた指標の関係

- $|D_f v_f - D_s v_s|_{\max}$ 
  - 間隙水の相対加速度の大きさの最大値
- $R_{u-p} = \frac{|D_f v_f - D_s v_s|_{\max}}{|D_s v_s|_{\max}}$ 
  - $u-p$  計算における静的浸透仮定 (1) の逸脱の程度を表す. この値が十分小さければ, 静的浸透仮定は成立するといえる.
- $R_\psi = \frac{|D_f v_f - D_s v_f|_{\max}}{|D_s v_s|_{\max}}$ 
  - (土骨格の加速度に対する) 間隙水の相対移流の卓越の程度を表す.

図-6では、 $u-p$  計算が収束し、その解が  $u-w-p$  と一致する条件を  $\circ$ 、 $u-p$  計算が収束するが、その解が  $u-w-p$  と一致しない条件を  $\Delta$ 、 $u-p$  計算が発散する条件を  $+$  でそれぞれ示している。同図より、 $u-p$  計算の破綻は (a) 無視できないオーダーの相対加速度の発生、(b)  $u-p$  における静的浸透仮定からの逸脱、(c) 固相加速度  $D_s v_s$  と同程度以上の相対移流項の発生を伴う傾向があることを確認した。

## 7. おわりに

本稿では、鉛直調和外力作用下にある二相系飽和弾性地盤の一次元振動問題を  $u-p$  formulation により解き、その解析可能域を示すとともに、水～土連成式において符号反転を生じるか否かという観点から誘導された「 $\gamma_{\theta 1}$  基準」により、その解析可能性は概ね判別可能できるが、低周波域（準静的条件）では同基準を逸脱していても  $u-p$  計算可能であることを示した。

また、同一の問題を  $u-w-p$  formulation によっても解き、 $u-p$  計算が破綻する  $\gamma_{\theta 1}$  基準上側の領域においても  $u-w-p$  では計算が継続可能であることを確認するとともに（ $u-w-p$  の有効性）、 $\gamma_{\theta 1}$  基準下側の領域においても、 $u-p$  解が  $u-w-p$  解と一致しない場合がある（ $\gamma_{\theta 1}$  基準を満足する条件を設定したからといって  $u-p$  仮定が成立するとは限らない）ことを確認した。さらに、 $u-w-p$  解との比較を通した  $u-p$  解の再評価として、 $u-p$  の計算可否と  $u-w-p$  解の特性を表す指標との関連を調べたところ、 $u-p$  計算が破綻する条件において、 $u-w-p$  解は (a) 無視できない相対加速度の発生、(b)  $u-p$  近似の破綻、および (c) 固相加速度と同程度以上の相対移流項の発生を伴う傾向があることを確認した。

謝辞： 本研究の実施にあたり、科学研究費補助金（基盤研究 (A)：課題番号 17H01289）の助成を受けた。

## 参考文献

- [1] Noda, T. and Toyoda, T.: Development and verification of a soilwater coupled finite deformation analysis based on  $u-w-p$  formulation with fluid convective nonlinearity, *Soils and Foundations*, Vol. 59, No. 4, pp.888-904, 2019.
- [2] Toyoda, T. and Noda, T.: Numerical simulation based heuristic investigation of inertia-induced phenomena and theoretical solution based verification by the damped wave equation for the dynamic deformation of saturated soil based on the  $u-w-p$  governing equation, *Soils and Foundations*, Vol. 61, No. 2, pp.352-370, 2021.
- [3] Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating SYS Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 48, No.6, pp.771-790, 2008.
- [4] 加藤満: 多次元液状化解析法とその応用に関する研究, 岐阜大学工学博士申請論文, 1995.