

u-w-p formulation に基づく有限変形圧密解析の有効性

Efficacy of u-w-p formulation-based finite consolidation analysis

豊田智大¹⁾, 野田利弘²⁾

Tomohiro Toyoda and Toshihiro Noda

¹⁾修 (工) 名古屋大学 工学研究科 学生 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: toyoda.tomohiro@i.mbox.nagoya-u.ac.jp)

²⁾博 (工) 名古屋大学 減災連携研究センター 教授 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: noda@civil.nagoya-u.ac.jp)

Soil-water coupled analysis of saturated soil is usually based on *u-p* formulation, which introduces the assumption to regard water flow as static permeation. To consider the dynamic water permeation, a two-phase finite deformation analysis code is developed based on *u-w-p* formulation which excludes the assumption. This paper indicates that the immediate settlement of high permeable soil, which cannot be solved by *u-p* formulation, can be solved by the *u-w-p* formulation. In addition, analysis results reveal that inertia term of water makes time lag on the initiation of consolidation.

Key Words : 混合体理論, 水～土骨格連成解析, *u-w-p* formulation, 有限変形, 高透水性

1. はじめに

飽和土の水～土骨格連成解析は, 間隙水の浸透が静的に生じることを仮定する *u-p* formulation に基づいて定式化されることが多い。しかし, 浸透が動的にも生じうる高透水性材料にこの手法を適用すれば, 仮定の破綻により計算不能となる。そこで筆者らは, この仮定を導入しない Full-formulation に基づく定式化手法として, *u-w-p* formulation に基づく二相系有限変形解析手法を新たに開発してきた。本稿では, 浸透問題に対して解を検証した後, 弾性材料の一次元圧密問題を例にとり, *u-p* formulation では仮定の破綻により計算不能となる高透水材料の即時沈下問題が *u-w-p* formulation によって求解可能となることを示す。また, この手法により考慮可能な間隙水の動的運動が弾性材料の一次元圧密過程に及ぼす影響についても明らかにする。

2. u-w-p formulation に基づく支配方程式の要諦

混合体理論 [1] に基づく飽和土の力学は, 各相の運動方程式と質量保存則を連立し, 場の未知数である固相変位 *u*, 液相相対変位 *w*, 間隙水圧 *p* を求める問題に帰着できる。このとき, 方程式系の支配方程式は Full-formulation (とくに *u-w-p* formulation [2]) と呼ばれる。飽和土の水～土骨格連成有限変形解析手法である **GEOASIA** [3] は, 上記の厳密な定式化に「液相の固相に対する相対加速度が固相の加速度に対して非常に小さい」という近似を導入することにより液相相対変位 *w* を消去して方程式系を縮小した *u-p* formulation に基づく定式化を採用している。この仮定により方程式の数を減らすことで計算コストは削減されるが, 間隙水の動的浸透を無視することとなるため, 極めて透水性の高い地盤材料への適用は困難であった。

そこで筆者らは, 上記の仮定を導入しない手法である *u-w-p* formulation に基づいて **GEOASIA** の支配方程式を再定式化し, 間隙水の動的浸透を考慮可能な解析手法を新たに開発した。土骨格の変形現象と間隙水の浸

透現象を up-dated Lagrange 法により刻々と追跡するため, *u-w-p* formulation に基づく場の未知数として, 固相変位 *v_s*, 液相相対変位速度 *w*, 間隙水圧 *u* の3つをとり, これらを以下の方程式系を解くことで求める。
混合体の運動方程式

$$\rho_s D_s v_s + \rho_f D_f v_f = \text{div } T + \rho b \quad (1)$$

液相の運動方程式 (加速度を考慮した Darcy 則)

$$\rho^f D_f v_f = -\gamma_w \text{grad } h - \frac{\gamma_w}{k} w \quad (2)$$

水～土骨格連成式 (質量保存則)

$$\text{div } v_s + \text{div } w = 0 \quad (3)$$

ここに, $\rho, \rho_s, \rho_f, \rho^f$ はそれぞれ混合体, 固相, 液相, 間隙水の密度, D_s, D_f はそれぞれ固相, 液相からみた物質時間微分作用素, T は全応力テンソル, $b = -g e_3$ は, 物体力 (g は重力加速度, e_3 鉛直上向きの単位ベクトル), h は全水頭, k は透水係数, γ_w は間隙水の単位体積重量である。 v_f は液相変位速度であり, 間隙水の相対速度 w と以下の関係がある。

$$w = n(v_f - v_s) \quad (4)$$

ここに, n は間隙率である。また, 液相加速度 $D_f v_f$ については, Lagrange 的に観測される固相物質点と同位置を占める液相物質点を Euler 的に観測するため, 液相からみた物質時間微分 D_f を固相からみた物質時間微分 D_s に変換する際に生じる相対移流項を考慮して次式で表す。

$$\begin{aligned} D_f v_f &= D_s v_f + (\text{grad } v_f)(v_f - v_s) \\ &= D_s v_s + \frac{1}{n} D_s w + \frac{1}{n} (\text{grad } v_s) w + \frac{1}{n^2} (\text{grad } w) w \\ &\quad - \frac{1-n}{n^2} (\text{tr } D_s) w - \frac{1}{n^3} (\text{grad } n \cdot w) w \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 D_s は固相のストレッチングテンソルである。土骨格の構成式として増分型の等方 Hooke 則を搭載するため、混合体の運動方程式 (1) は固相に着目した物質時間微分 D_s を作用させて速度型の方程式に変換した上で離散化する。このとき、客観性のある有効応力速度として Green-Naghdi rate [4] を用い、公称応力速度は Yatomi et al. [5] の表記法に従って与える。また、浸透現象の物理モデルとして、Christian 流 [6] または田村流 [7] の物理モデルを拡張して用い [8]、相間相互作用力は西村 [9] に倣って Hagen-Poiseuille 流れの類推により与える。空間離散化について、固相速度 v_s および液相相対速度 w は有限要素法により同一の形状関数（四角形 4 節点 Iso-parametric 要素）を用いて離散化することとし、水圧は有限体積法的に要素代表値を用いて積分することとした。時間離散化について、固相速度 v_s および液相相対速度 w はそれぞれ固相から観測された躍度 $D_s^2 v_s$ 、 $D_s^2 w$ の線形性を仮定する Wilson- θ 法 [10]、水圧は台形公式により積分することとした。

なお、 u - p formulation では、静的浸透の仮定

$$D_f v_f - D_s v_s \ll D_s v_s \quad (6)$$

を適用し、さらに液相の運動方程式 (2) を連成式 (3) に代入することで液相相対速度 w を消去した以下の方程式系を解くこととなる。

混合体の運動方程式

$$\rho D_s v_s = \text{div } T + \rho b \quad (7)$$

水～土骨格連成式

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \text{div} (D_s v_s) - \text{div } v_s + \text{div} (k \text{grad } h) = 0 \quad (8)$$

3. 動的浸透問題

本章では、 u - w - p formulation により考慮が可能となる「間隙水の動的浸透現象」について理解するため、多孔質媒体中を流れる間隙水の流動現象の解析結果を示す。そこで、本章の解析においては土骨格の空間座標を拘束 ($v_s = 0$) し、間隙水の運動のみを解くこととする。このとき、「混合体の運動方程式」を解く必要はなく、 u - w - p formulation での方程式系は「液相の運動方程式（固相からの反作用力を考慮した Euler 方程式）」と「連成式（流量連続式）」を連立して解く流体の問題に帰着される。

(1) 1次元浸透問題

図-1 に示すような数値模型に対して、領域下端に瞬時的にヘッド $h=10\text{m}$ を与えた直後の鉛直流速 w の推移を解く。ここでは簡単のため自重（位置水頭）を無視し、材料定数は領域内で一様に表-1 のとおり与えた。

u - p formulation および u - w - p formulation により間隙水の流速の推移を算定した結果を図-2 に示す。

まず、 u - w - p formulation による解析結果を見ると、はじめ止まっていた間隙水が加速されてゆき、やがて定常流量に至るといった加速度的な浸透現象が解かれていることがわかる。これは、液相の慣性を考慮することにより、間隙水の動的運動が「初期値境界値問題」として解かれたことを意味する。なお、この結果は、液

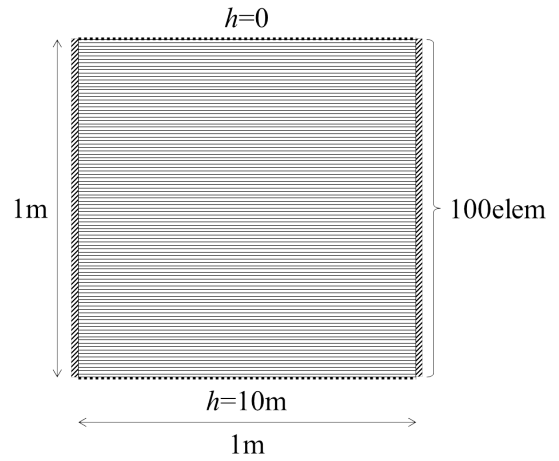


図-1 有限要素メッシュ (1次元浸透)

相の運動方程式 (2) を $w = w(t)$ に関する 1 階線形微分方程式と見做し、与えられた境界条件および初期条件 $w|_{t=0} = 0$ の下で解くことにより得られる厳密解

$$w = w(t) = -k \text{grad } h \left[1 - \exp\left(-\frac{n \gamma_w}{\rho^f k} t\right) \right] \quad (9)$$

にも一致することから、解析手法により液相の運動が正しく解かれることを確認している (Verification)。

一方、 u - p formulation による解は、動水勾配に従い即時的に静的 Darcy 流れの定常流量に至る。土骨格の運動を拘束しているとき、 u - p 仮定 (6) より $D_f v_f \cong \mathbf{0}$ (間隙水の運動は静的) となる。したがって、液相の運動方程式 (2) もまた、動水勾配と相互作用力のつりあい式

$$\mathbf{0} = -\gamma_w \text{grad } h - \frac{\gamma_w}{k} w \quad (10)$$

となり、任意の時刻において定常流速

$$w = w(t) = -k \text{grad } h = 10^{-4} \text{m/s} \quad (11)$$

を与える。すなわち、 u - p formulation によっては間隙水の慣性を考慮した解析は不可能である。

表-1 多孔質媒体の材料定数

Coefficient of permeability k	10^{-5} cm/s
Porosity n	0.50
Density of pore water ρ^f	1.00 g/cm^3
Unit weight of water γ_w	9.81 kN/m^3

(2) 2次元浸透問題

多次元浸透においても、間隙水の運動は 1 次元浸透と同様、加速度的に解かれる。図-3 に示すような 2 次元平面上の等方浸透場において、材料定数には前節と同じ値を用い、領域上端に瞬時的にヘッド $h=10\text{m}$ を与えた直後の点 A における流速 w の推移と定常状態におけるヘッド分布を図-4、図-5 に示す。1 次元浸透と同様、動的な間隙水の運動と、Laplace 方程式の解に等価なヘッド分布が得られた (Verification)。

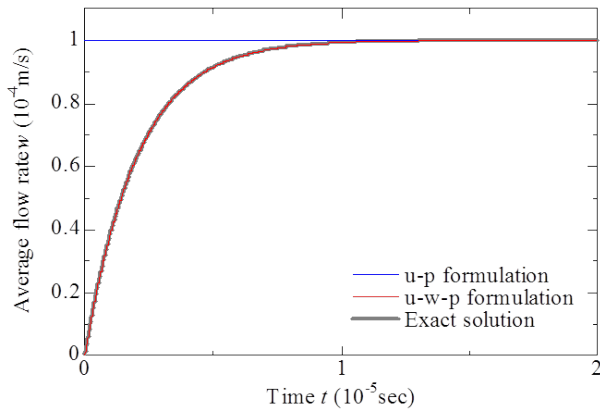


図-2 流速 w の推移

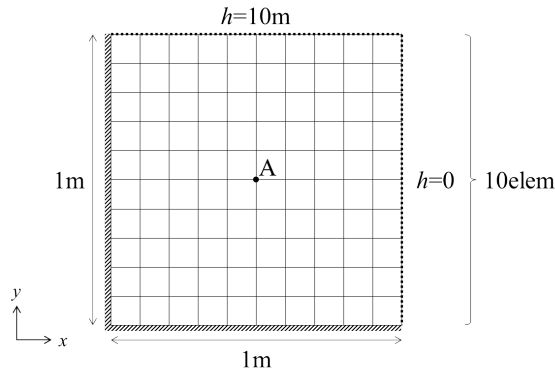


図-3 有限要素メッシュ (2次元浸透)

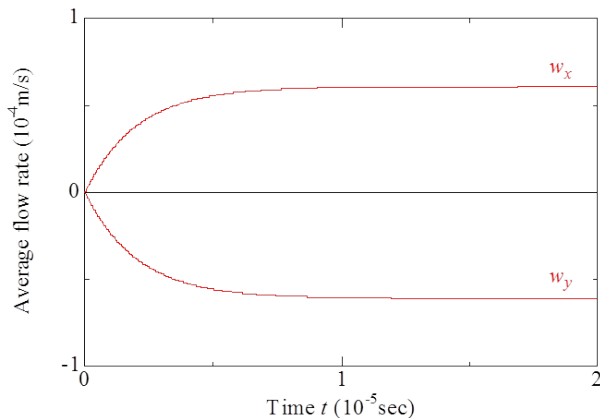


図-4 点 A における流速 w の推移

4. 1次元弾性有限変形圧密解析

有限変形場における1次元弾性圧密問題を以下の3つの方法で解く。

- ① 有限差分法: 静的問題として1次元圧密方程式を解く
- ② $u-p$ formulation: **GEOASIA**, 土骨格の慣性を考慮して解く
- ③ $u-w-p$ formulation: 土骨格と間隙水の慣性を考慮して解く

本稿では、低透水性 ($k = 10^{-8} \text{cm/s}$) および高透水性 ($k = 10^{-3} \text{cm/s}$) の2種類の材料について解析を実施した。解析に用いた有限要素メッシュを図-6に示す。土骨格については下端を基盤面として固定し、間隙水は下端非排水、上端排水の片面排水条件とした。本章の解析では、瞬間載荷を想定して模型全体に初期水圧 10000kPa を与え、これが消散する過程での圧密沈下量 ρ の推移

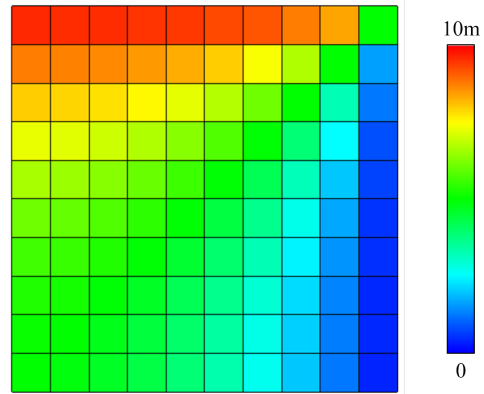


図-5 定常状態におけるヘッド分布

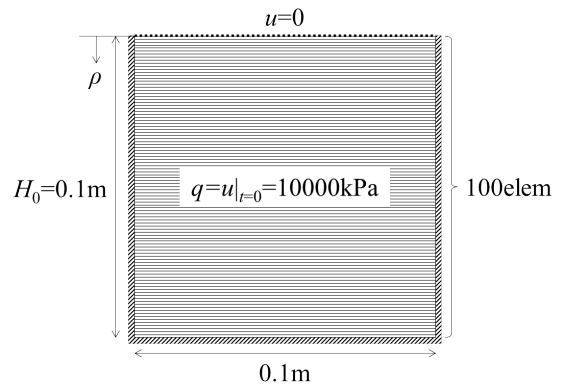


図-6 有限要素メッシュ (1次元圧密)

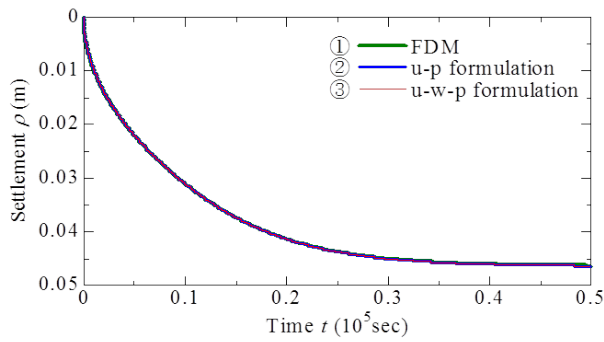
を観察する。等方弾性体の各材料定数は表-2のとおり設定した。

表-2 等方弾性体の材料定数

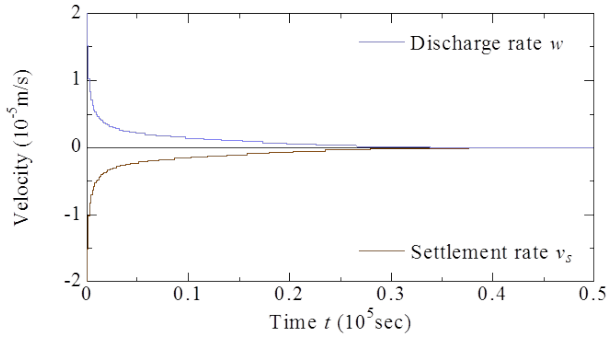
Young's modulus E	10000 kN/m^2
Poisson's ratio ν	0.35
Coefficient of permeability k	10^{-8} or 10^{-3} cm/s
Porosity n	0.50
Density of soil particle ρ^s	2.65 g/cm^3
Density of pore water ρ^f	1.00 g/cm^3
Unit weight of water γ_w	9.81 kN/m^3

(1) 低透水性土の解析結果

低透水性材料の解析結果として、①～③の解析手法により得られた沈下-時間関係を図-7(a)に示す。同図より、 $u-w-p$ formulationでの解析結果が、差分法および $u-p$ formulationの解と一致していることがわかる。この結果は、低透水性条件において間隙水の運動は準静的におこり、 $u-p$ formulationにおける仮定が十分に妥当であることを示している。換言すれば、 $u-w-p$ formulationに基づく解析コードのVerificationができたことを意味している。また、 $u-w-p$ formulationでの解析結果として、地表面での沈下速度および排水速度の推移を図-7(b)に示す。同図は、沈下速度/排水速度が互いに大きさが同じで逆向きであって、その値は初期に最大値をとり次第に減少してゆくことを示している。なお、沈下-時間関係はいずれも下に凸の形状をしており、その最終沈下量は、 K_0 条件での1次元有限変形計算より定まる

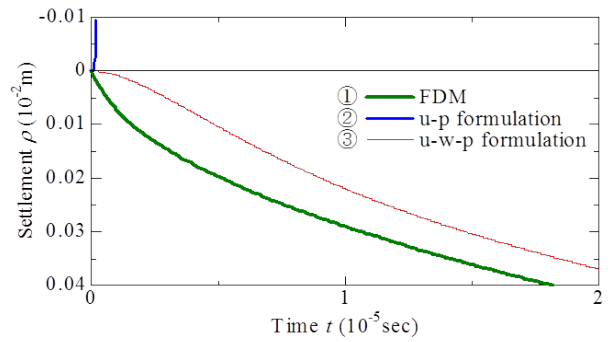


(a) 沈下-時間関係

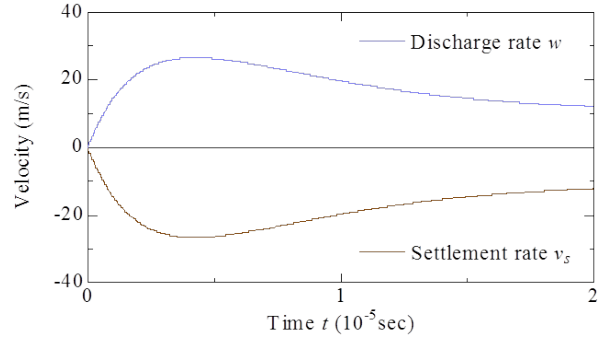


(b) 速度-時間関係 ($u-w-p$ formulation)

図-7 低透水性土の圧密解析結果



(a) 沈下-時間関係



(b) 速度-時間関係 ($u-w-p$ formulation)

図-8 高透水性土の圧密解析結果

理論解

$$\rho_f = H_0 \left[1 - \exp \left\{ - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \frac{q}{E} \right\} \right] = 0.04647m \quad (12)$$

に一致している。

(2) 高透水性土の解析結果

高透水性材料の解析結果として、解析初期段階での沈下-時間関係を図-8(a)に示す。 $u-p$ formulationでは、解析開始直後、地表面が隆起して解析が破綻する。これは、透水係数 k が大きいときには、仮定の破綻により、連成式が質量保存則に適合しない形式、すなわち「土骨格の圧縮（膨張）に対応して間隙水の吸水（排水）が生じる」という不合理な状態を与えるためである。一方、 $u-w-p$ formulationでは破綻することなく沈下計算を継続できることから、 $u-w-p$ formulationの有効性が確認された。また、差分法では計算開始後速やかに沈下し始めるが、 $u-w-p$ formulationでは沈下が始まるまでに遅延を生じ、沈下-時間曲線はS字カーブになる。これは、間隙水の慣性に起因して、初期に静止していた間隙水が加速されて動き出すという動的効果によるものであって、 $u-w-p$ formulationによってのみ解析可能な現象である。沈下速度・排水速度の推移を示した図-8(b)もまた、静止していた固相と液相が加速されたのち、ピーク到達後に収束してゆく様子を示している。

5. おわりに

本稿では、 $u-w-p$ formulationにより間隙水の動的浸透可能となることを示した。また、動的浸透を考慮した

一次元有限変形圧密解析により、 $u-w-p$ formulationに基づく解析手法の検証を行うとともに、 $u-p$ formulationでは解析不能な問題が解けるようになること、間隙水の慣性に起因して沈下に時間遅れが生じることを示し、本手法の有効性を確認した。今後は、本手法を地震応答解析などに適用し、動的問題に対する有効性を検討してゆく。

謝辞：本研究は科学研究費補助金（基盤研究（A）：課題番号 25249064）の補助を受けて実施した。

参考文献

- [1] Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low-frequency range, Journal of Acoustic Society of America, Vol.28, No.2, pp.168-178, 1956.
- [2] Zienkiewicz, O. C., Chan, A. H. C., Pastor, M., Schrefler, B. A., and Shiomi, T.: Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering, John Wiley & Sons, pp.29-30, 1999.
- [3] Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS cam-clay model, Soils and Foundations, Vol.48, No.6, pp.771-790, 2008.
- [4] Green, A. E. and Naghdi, P. M.: A general theory of elasto-plastic continuum, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.18, pp.251-281, 1965.
- [5] Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial

- cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- [6] Christian, J. T.: Undrained stress distribution by numerical method, *Proceedings of ASCE*, Vol.94, SM6, pp.1331-1345, 1968.
- [7] 赤井浩一, 田村武: 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, *土木学会論文集*, Vol.269, pp.95-104, 1978.
- [8] Asaoka, A., Nakano, M., Noda, T.: Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol.34, No.1, pp.91-106, 1994.
- [9] 西村直志: 地盤工学ハンドブック 第3章土質力学, (社)地盤工学会, pp.51-64, 1999.
- [10] Wilson, E. L., Farhoomand, I. and Bathe, K. J.: Non-linear dynamic analysis of complex structures, *Int. J. Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, 1, pp.241-252, 1973.