

離散化式の固有ベクトルに着目した u - p formulation に基づく 水～土骨格連成解析の数値不安定化現象の特徴の理解

水～土骨格連成 数値安定性 数値解析

名古屋大学 国際会員 ○豊田 智大, 野田 利弘

1. はじめに

飽和土の動的水～土骨格連成解析¹⁾のうち、間隙水の静的浸透を仮定する u - p formulation²⁾ (以降、単に u - p と記す) の離散化方程式は、高透水性地盤といった間隙水の動的浸透が卓越しうな条件下において数値発散を来すことが知られている³⁾ (u - p の限界)。著者らは、間隙水の動的浸透を考慮可能な u - w - p formulation²⁾であれば、数値発散を生じることなく求解が可能であることを実証してきた⁴⁾。他方、 u - p の数値安定性について、離散化式および時間積分公式より構築される連立漸化式のスペクトル半径を用いて評価し、 u - p の不安定域を可視化するとともに (2.で後述)、既往の u - p 適用可否基準³⁾の妥当性について議論してきた⁵⁾。本稿では、 u - p をその不安定域において適用した際に顕在化する発散解の特徴について議論する。具体的には、 u - p 解において発散する固有モードを抽出し、その特徴を示す。

2. u - p formulation の数値安定性の検討⁵⁾

2-1. 支配方程式 Updated Lagrange 法に基づく u - p の支配方程式 (混合体の速度型運動方程式、水～土骨格連成式) を一次元条件下で無次元化した後、有限要素法および Christian・田村流の物理モデルにより空間離散化し、これに Wilson- θ 法の時間積分公式を組み合わせると、方程式系を以下の連立漸化式の形に整理できる。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{E}\mathbf{u}_n \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{u}_n$ 、 $\mathbf{u}_{n+1}$ はそれぞれ n 番目、 $(n+1)$ 番目の時間 step における自由度毎の未知変数の成分からなる係数列ベクトルである。状態更新マトリクス $\mathbf{E}$ の具体形は紙幅の都合上省略するが、微小変形弾性解析では定係数行列となる。初期状態 $\mathbf{u}_0$ を設定すれば、式(1)を用いて次刻の状態 $\mathbf{u}_1$ 、 $\mathbf{u}_2$ 、 $\dots$ を次々と求めることができる (時刻歴解析)。

2-2. 数値安定性評価法 状態更新マトリクス $\mathbf{E}$ (実非対称かつ対角化可能行列) の標準固有値問題を、固有値を λ_i 、正規化された固有ベクトルを $\mathbf{p}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) として、次式で定義する。

$$\mathbf{E}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad \mathbf{E} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad \mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad \mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N] \quad (2)$$

式(1)による状態更新が発散することなく進行するための条件は、 $\mathbf{E}$ のスペクトル半径 $\rho(\mathbf{E})$ を用いて次式でかける。

$$\rho(\mathbf{E}) \equiv \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_N|) \leq 1 \Rightarrow \text{Stable}. \quad (3)$$

2-3. u - p formulation の数値安定性 u - p の安定域を調べるため、マトリクス $\mathbf{E}$ のスペクトル半径 $\rho(\mathbf{E})$ の値が透水係数 k および時間刻み幅 Δt に応じてどのように変化するか調べた。ただし、要素分割数を $m = 10$ とし (これ以上分割数を増やしても安定性に影響がないことを確認済)、典型的なパラメータとして、 $\theta = 1.4$ 、一次元層厚 $H = 1\text{m}$ 、ヤング率 $E = 10^4\text{ kPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.30$ 、土粒子比重 $G_s = 2.65$ 、間隙比 $e = 1.0$ を与えた。また、領域下端を変位固定・非排水境界、上端を変位自由・排水境界とした。固有値解析には Intel® Math Kernel Library を使用した。

スペクトル半径 $\rho(\mathbf{E})$ の値を透水係数 k —時間刻み幅 Δt 平面上にプロットした結果を図 1 に示す。同図より、スペクトル半径の値は k - Δt 平面上で山脈状に分布することが確認される。

$\rho(\mathbf{E})$ を $1.0 + \delta$ (δ : 十分に小さい値、ここでは 10^{-4} とする) で二値化すると図 2 が得られ、 u - p の安定域/不安定域はそれぞれ緑色/薄緑色で示される。同図より、 u - p の不安定域 (薄緑色) は帯状に分布するが、図の中央部で明確に屈曲していることがわかる。すなわち、図の下側 (低透水性領域) では安定域と不安定域の境界線は斜めに分布することから、計算可否は透水係数—時間刻み幅比 $k/\Delta t$ によって決まるが、上側 (高透水性領域) では縦に分布することから、計算可否は時間刻み幅 Δt によって決まることがわかる。

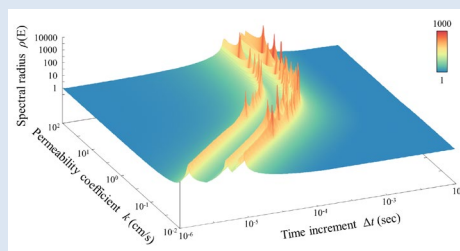


図 1 k - Δt 平面上のスペクトル半径分布

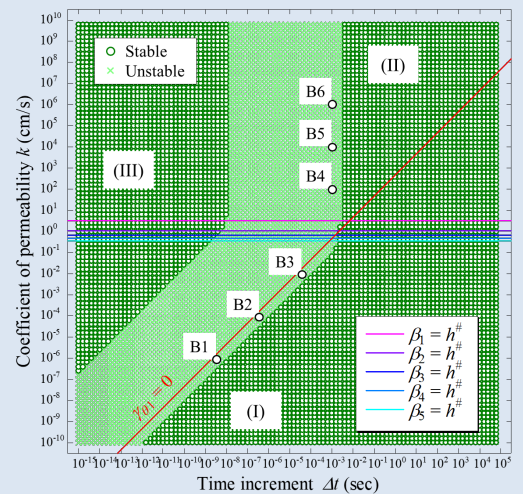


図 2 k - Δt 平面上の安定域・不安定域⁵⁾

3. 不安定域が屈曲する理由に関する考察

まず、図 2 の不安定域の屈曲理由について考察する。既報 6)によれば、一次元二相系動弾性問題の $u-p$ による変位時刻歴の理論解は複数の固有関数の重ね合わせで表現されるが、各固有関数は透水係数に応じて変化し、透水係数が小さければ過減衰となり、透水係数が大きければ不足減衰となる。図 2 に併記された $\beta_j = h^\#$ 線 ($j = 1, 2, \dots$) は、 j 次の固有関数が、その下側では過減衰、上側では不足減衰となるような閾線である。とくに $\beta_1 = h^\#$ 線 (桃色) は、その下側では現象を支配する低次の固有関数が過減衰を呈するため変位時刻歴はほぼ「静的圧密」となるが、上側では全固有関数が不足減衰を呈するため変位時刻歴が「減衰振動」となり、解の性質が大きく変化する点で重要である。この $\beta_1 = h^\#$ 線の位置が、スペクトル半径より推定した $u-p$ 不安定域の屈曲位置と概ね一致していることから、不安定域の屈曲は発散する固有モードの違いに因るのではないかと仮説を立てた。

図 2 の不安定域において、 $\beta_1 = h^\#$ 線の下側と上側にそれぞれ位置する B1~B3, B4~B6 の条件に対し、マトリクス E の固有値の絶対値が最大となるモード (以後、「最不安定モード」と呼ぶ) の固有値 λ_1 を表 1 に、固有ベクトル p_1 の成分を比較した結果を図 3 に示す。表 1 より、 $\beta_1 = h^\#$ 線下側で同一の $k/\Delta t$ の値を有する B1~B3 の固有値は同一であり、図 3 に示す固有ベクトルの成分も一致している (共軸) ことから、B1~B3 は同一の発散モードを有するといえる。同様に、 $\beta_1 = h^\#$ 線上側で同一の Δt の値を有する B4~B6 の固有値・固有ベクトルの成分も一致していることから、B4~B6 もまた同一の発散モードを有する。このことから、一見すると $\beta_1 = h^\#$ 線の上下で異なるモードが発散するように見えるが、図 1 のスペクトル半径 (再不安定モードの固有値の絶対値) の分布は屈曲近傍で尖りなく滑らかであることから、屈曲は不連続なモードスイッチングによるものではなく、固有ベクトルの連続的な回転により生じたものと考察した。

4. 発散モードの特徴

B1~B6 で共通の特徴として、表 1 より、最不安定モードの固有値 λ_1 はいずれも実負値である。これは、初期状態 u_0 に占める最不安定モードの固有ベクトルが、①step 更新を 1 回重ねるごとに符号反転を伴いつつ発散してゆくことを意味している (公比を負とする等比数列の発散)。また、図 3 より水圧成分のみを取り出すと、水圧の深度分布として図 4 が得られるが、ある自由度の水圧は隣接自由度の水圧と逆符号となる形で分布しており、カラーマップを描けばいわゆる②チェッカーボード状の水圧分布となる。①②はいずれも、 $u-p$ 計算が不安定化した際に顕れる典型的な現象である。

一方、B1~B3 と B4~B6 では、図 3 に示す最不安定モードの固有ベクトルの向き (発散の様相) は全く異なる。すなわち、B1~B3 (低透水性域) の固有ベクトルは土骨格の変位関連成分 (躍度・加速度・速度成分) をほとんど含まないことから、数値発散は水圧場において顕著に生じ、固体変形場の発散を伴わないのに対し、B4~B6 (高透水性域) の固有ベクトルは土骨格の変位関連成分を有意に含むことから、水圧場のみならず固体変位場の振動をも伴って発散してゆく。

5. おわりに

本稿では、 $u-p$ の離散化式に時間積分公式を組み合わせて構築した連立漸化式のスペクトル半径を用いた数値安定性評価事例において、不安定域における発散モードの特徴を調べ、以下の知見を得た。

- $u-p$ の不安定域は透水係数 k - 時間刻み幅 Δt 平面上で帯状に分布し、 $u-p$ 理論解の主要モードの固有関数が過減衰から不足減衰へと変化する閾線近傍で屈曲する。屈曲近傍におけるスペクトル半径分布の滑らかさから、この屈曲は、発散モードのスイッチングではなく、固有ベクトルの回転により齎されることが示唆された。
- $u-p$ 不安定域における最不安定モードは、①step 毎の水圧の符号反転と②チェッカーボード状の水圧分布を伴う。①②の特徴は、 $u-p$ を不安定域において適用した際に生じる典型的な現象である。 $u-p$ 解析の出力結果が①②の兆候を有する場合、 $u-p$ の適用範囲を超えており、現象を正しく評価できていない ($u-w-p$ の適用が必要である) 可能性があるといえる。また、 $u-p$ 解の数値発散の様相は、低透水性領域では土骨格はほとんど変形をほぼ伴わず水圧のみが発散してゆくのに対し、高透水性領域では土骨格の変形の振動を伴って発散してゆくこととして特徴づけられる。

謝辞 本研究は、JSPS 科研費 22H14324 の助成を受けた。

参考文献) 1) Biot, M.A. (1962): Mechanics of deformation..., *J. Appl. Phys.*, **33**, 1482–1498. 2) Zienkiewicz, O.C. et al. (1980): Drained, undrained, consolidating..., *Géotechnique*, **30**(4), 385–395. 3) Noda, T., et al. (2008): Soil-water coupled finite deformation..., *S&F*, **48**(6), 771–790. 4) Noda, T., Toyoda, T. (2019): Development and verification of a soil-water coupled..., *S&F*, **59**(4), 888–904. 5) 豊田, 野田 (2022): スペクトル半径を用いた..., 第 66 回理論応用力学講演会, OS4-4-04. 6) Toyoda, T., Noda, T. (2024): Unconditional convergence..., *S&F*, **64**(1), 101421.

表 1 最不安定モードの固有値

	透水係数 k (cm/s)	時間刻み幅 Δt (sec)	$k/\Delta t$ (cm/s ²)	固有値 λ_1
B1	$10^{-6.0}$	$10^{-8.5}$	$10^{2.5}$	-1.69
B2	$10^{-4.0}$	$10^{-6.5}$	$10^{2.5}$	-1.69
B3	$10^{-2.0}$	$10^{-4.5}$	$10^{2.5}$	-1.69
B4	$10^{2.0}$	$10^{-3.0}$	$10^{5.0}$	-2.09
B5	$10^{4.0}$	$10^{-3.0}$	$10^{7.0}$	-2.09
B6	$10^{6.0}$	$10^{-3.0}$	$10^{9.0}$	-2.09

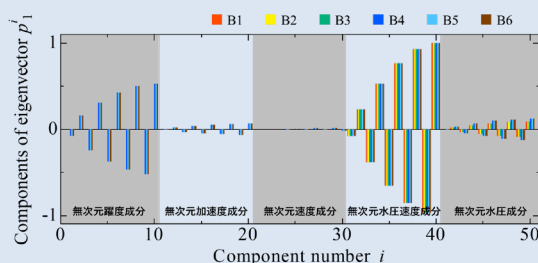


図 3 最不安定モードの固有ベクトル成分

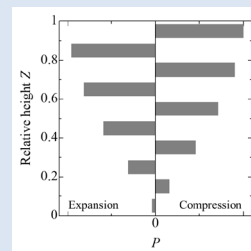


図 4 最不安定モードの水圧深度分布 (B2)