

有限体積法に基づく飽和浸透流解析における Cross-diffusion term の重要性 (シンポジウム講演概要)

Development and verification of saturated seepage flow analysis based on finite volume method considering cross-diffusion term (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

横井 崇人 (名古屋大・工) 豊田 智大 (名古屋大・工) 野田 利弘 (名古屋大・工)

Takato YOKOI, Nagoya University
Tomohiro TOYODA, Nagoya University
Toshihiro NODA, Nagoya University
E-mail: yokoi.takato.v5@s.mail.nagoya-u.ac.jp

Most seepage/soil-water coupling analyses discretize pressure field using the finite volume method. Especially in the Tamura's method, the diffusion term is represented based on the pressure gradient between element centers. However, when an unstructured mesh is used, the accuracy may be significantly degraded due to high mesh dependence. In this research, we examined the unstructured mesh patterns causing a lack of accuracy, then indicated the efficacy of consideration of the cross-diffusion term to improve the accuracy as far as the sufficiently fine mesh is implemented. The results of this study will enable calculations with sufficient accuracy for cases involving large deformations that occur during liquefaction caused by major earthquakes.

1. 研究の背景・目的

地盤の水～土骨格連成解析手法の一つに、土骨格の変形場は有限要素法で、間隙水圧(またはヘッド)は有限体積法で離散化する混合型の離散化手法がある。田村流の解析¹⁾では「構造格子」を対象に、Darcy 則にしたがう浸透流を記述する流量連続式(水～土骨格連成式)の拡散項を要素中心間の間隙水圧勾配を用いて記述した。また Asaoka et al.²⁾は同手法を「非構造格子」に拡張適用したが、特に斜交格子や不規則格子を含む「非構造格子」に対してはメッシュ依存性を呈し、その分割形状に応じて解析結果が大きく変化する場合がある。本稿では、構造格子を用いた飽和浸透流解析の非構造格子への拡張適用において、CFD 解析の分野において提案されている Cross-diffusion term³⁾(交差拡散項、以下、CD 項と呼ぶ)を考慮することで、同解析手法におけるメッシュ依存性を解消できることを示すとともに、その精度改善の程度を評価した結果を示す。

2. Cross-diffusion term の概要

ここでは、文献⁴⁾の表記法に従い定式化の要諦を示す。Fig.1 のような非構造格子中の 2 要素間での動水勾配ベクトル $\mathbf{i}$ を、要素中心間方向(ξ 方向)の成分 i_ξ と、要素境界面に平行な方向(η 方向)の成分 i_η に分解する。田村流の物理モデルにおいては、 i_ξ は、要素中心におけるヘッド h_A 、 h_i を用いて次式で近似できる。

$$i_\xi = -(\text{grad}h)_\xi \simeq -\left(\frac{h_i - h_A}{\Delta\xi}\right)e_\xi \quad (1)$$

ここに、 $\Delta\xi$ は要素中心間距離、 e_ξ は ξ 方向の単位ベクトルである。これに対し、 i_η は従来の田村流の物理モデルでは考慮されない動水勾配の成分であり、要素境界両端の節点 a, b 間のヘッド h_a 、 h_b を用いて次式で表す。

$$i_\eta = -(\text{grad}h)_\eta \simeq -\left(\frac{h_b - h_a}{\Delta\eta}\right)e_\eta \quad (2)$$

ここに、 $\Delta\eta$ は節点 a-b 間の距離、 e_η は η 方向の単位ベクトル

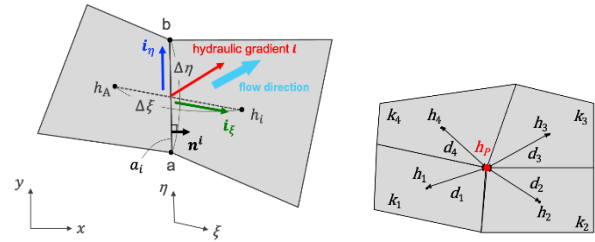


Fig. 1 Unstructured mesh

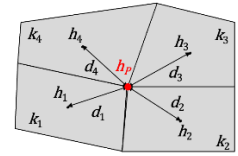


Fig. 2 Nodal head determination

である。要素毎の離散化された流量連続式(Laplace 方程式)は次式で表される。

$$\frac{\mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}^i a_i}{\mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_\xi} \frac{h_i - h_A}{\Delta\xi} = S_D, \quad S_D = \frac{\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta a_i}{\mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_\xi} \frac{h_b - h_a}{\Delta\eta} \quad (3)$$

式(3)中の S_D が CD 項である。また、 S_D の算定に用いる節点ヘッドは、合成透水係数公式からの類推により、周辺要素のヘッドの重み付き平均により次式で近似する。

$$h_P = \frac{\sum_i (k_i/d_i) h_i}{\sum_i (k_i/d_i)} \quad (4)$$

計算手順は次のとおりである。① $S_D = 0$ として要素毎の式(3)を連立して解き、要素ヘッドを求める。②要素ヘッドから式(4)により節点ヘッドを求める③ S_D を算出し、連立方程式を解きなおす。手順②～③を繰り返すことで、要素ごとのヘッドが求まる。

3. 解析結果 (CD 項の影響)

本稿では、一様な透水係数を有する 1 辺 10m の正方形矩形領域に対し、境界条件を Fig. 3 のとおり設定する。理論解は y 方向の「一次元浸透流」であり、正解のヘッド分布は、与えられた境界条件の下で $h^* = -2y + 10$ となる。また、正解の流速場は鉛直上向きに一樣であって、流速の x 方向成分はゼロである。本稿では、ヘッド分布の解析結果と理論解との相対誤差を式(5)で評価した。

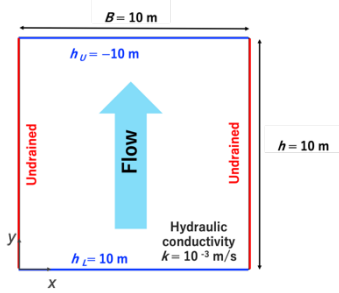


Fig. 3 Analysis conditions

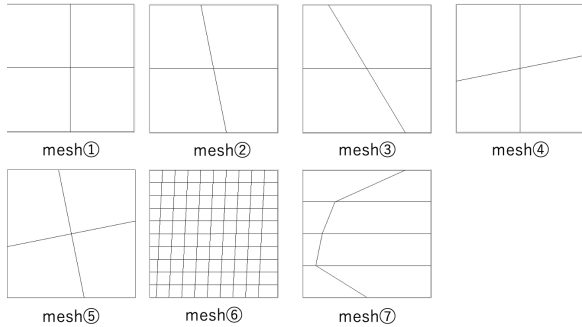


Fig. 4 Meshes for seepage analysis

$$\varepsilon_h[\%] = \frac{h - h^*}{\Delta h} \times 100[\%] \quad (5)$$

Fig. 4 に示すメッシュ①～⑦に対し、CD 項を考慮しない場合と考慮した場合について、要素ヘッドの相対誤差の大きさの最大値を Fig. 5 に一覧で示す。同図より、以下のことがいえる。

- ・ 構造格子(①)では CD 項の有無によらず正解を与える。
- ・ 非構造格子 (②～⑦) では、CD 項無しでは要素ヘッドに有意な相対誤差を生じる。なお、これにより鉛直流速が非一様化するとともに、水平流速も非零となる。
 - メッシュ②を例にとると、CD 項無しでは、要素ヘッドは水平方向にも非一様となり (Fig. 6(a))、ヘッドに有意な相対誤差を生じる (Fig. 6(b))。ヘッド分布は、Fig. 6(a)のように、左側で高くなる結果となるが、これは、傾斜面上での正解の動水勾配 (上向き) に占める CD 項が考慮されないことで、上流側 (左側) と下流側 (右側) のヘッド差が強調されることによる。なお、Fig. 6(b)のように、これにより鉛直流速が非一様化するとともに、水平流速も非零となる (Fig. 6(c))。
 - 歪みの程度が大きいほど誤差は大きい：歪みの小さい②では 2.8%程度であったのに対し、歪みの大きい③では 10%程度となった。
 - 流れに平行方向のグリッド線の歪みの方が、流れ直交方向のグリッド線の歪みより大きな誤差を生じる：縦グリッド線 (流れ方向) を歪めた②では 2.8%程度であるが、横グリッド線 (流れ直交方向) を歪めた④では 1.3%程度となった。これは、②の傾斜させたグリッドにおいて正解の動水勾配 (上向き) に占める Cross-diffusion の割合が大きいことによる。
 - 縦横両方のグリッド線を同時に回転させた場合 (⑤) の誤差は 1.7%程度と、片方を回転させた場合 (②, ③) より小さい。これは、模型中央でのグリッドの直交性が保持されることによる。

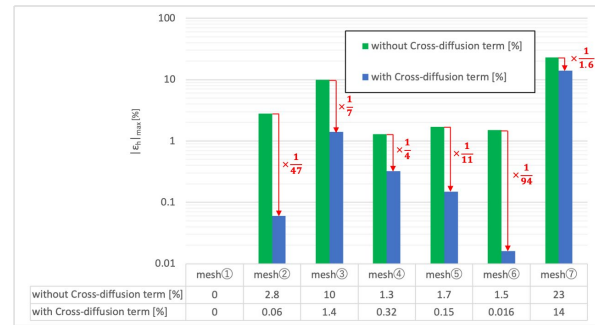


Fig. 5 Maximum magnitude of relative error of head

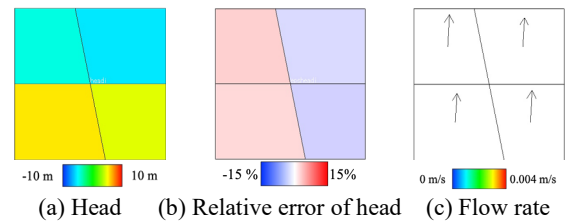


Fig. 6 Analysis results (Mesh ②)

- メッシュを細かくすることで精度は改善されるものの (⑥) メッシュの斜交は解消されないため依然として誤差を生じる。
- ・ いずれの非構造格子 (②～⑦) においても、CD 項無しで生じた誤差は、CD 項の導入により緩和された。
- ただし、メッシュを極端に大きく歪めた場合 (⑦) では、CD 項による精度改善は限定的である。これは、節点ヘッドの算出式(3)の近似が十分に機能しないことに因るものである。したがって、解析誤差の低減のためには、CD 項を考慮する場合であっても尚、メッシュの細分化が必要であることが示唆された。

結論

田村流の物理モデルを、非構造格子に対しそのまま適用すると解析精度が悪化するが、CD 項の導入により非構造格子での精度を大幅に改善できることを確認した。一方、極端に歪んだメッシュでは CD 項の導入による精度改善は限定的であったことから、CD 項を考慮する場合においても、依然としてメッシュの細分化は重要であることが示唆された。今後は、水～土骨格連成解析に CD 項を考慮するとともに、圧密などの時間依存変形の数値解析において CD 項を考慮することの重要性を指摘してゆく。

参考文献

- 1) 赤井浩一, 田村武: 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, 269, pp.95-104, 1978.
- 2) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state, Soils and Foundations, Vol.34, No.1, pp.91-105, 1994.
- 3) S.R. Mathur and J.Y. Murthy: A pressure-based method for unstructured meshes, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 31, pp. 195-215, 1997.
- 4) H.K. Versteeg, and W. Malalasekera: 数値流体力学 (松下洋介, 齋藤泰洋, 青木秀之, 三浦隆利 訳), 森北出版, 第 2 版, pp. 329-474, 2011.