

上下負荷面摩擦モデルの初期値境界値問題への適用と単純せん断場でのすべり伝播解析

摩擦 弾塑性 すべり伝播

名古屋大学 正会員 ○安池 亮

国際会員 豊田 智大, 野田 利弘

1. はじめに

これまで著者らは摩擦現象で予想される接触面の固着～すべり状態の滑らかな遷移や摩擦力の連続的变化を表現可能な時間依存性上下負荷面摩擦モデルを開発¹⁾している。本モデルは、静止摩擦係数が動摩擦係数より大きい状態を摩擦係数の「嵩張り」（構造）と表現している。これまで、同モデルの表現能力を様々な初期値問題を通じて確認をしてきた²⁾。本稿では、速度型動的変形解析手法の境界条件に本モデルを搭載した新たな解析手法を開発し、摩擦由来の動力学現象（stick-slip 現象）の再現を行った。特に単純せん断によって生じる接触面の法線応力分布の変化に着目し、すべりが非一様に生じることへの影響について議論する。

2. 上下負荷面摩擦モデルと定式化の概要

本稿で使用した時間依存性上下負荷面摩擦モデルは、接触応力速度とすべり速度（相対速度）の関係を与える速度型の弾塑性構成式であり、接触面状態を記述するパラメータを陽に導入することで固着～すべり状態の遷移に物理的な意味を与えている。モデルの詳細は Toyoda et al.¹⁾に譲るが、本稿では、同モデルにより表現される接触応力を境界条件として与えるとともに、物体の慣性力を考慮した速度型動的変形弾性解析を定式化・実装する。ただし、摩擦由来の境界強非線形挙動のみに着目するため、物体の弾塑性と有限変形は無視した動的微小変形弾性解析を実施した。この場合、弱形式化された速度型運動方程式は以下の通りであるが、荷重速度境界を接触応力速度境界と分けて記述していることに留意されたい（図 1）。

$$\int_V \rho \ddot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S_t} \mathbf{t}_t \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_{S_c} \mathbf{f}_c \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad (1)$$

この式の右辺第三項において上下負荷面摩擦モデルを適用し定式化を行った。定式化の詳細は紙幅の都合上割愛するが、有限要素毎の離散化式は以下となる。

$$M\{\ddot{\mathbf{v}}^N\} + (K - K_c)\{\mathbf{v}^N\} = \{\mathbf{f}\} \quad (2)$$

ここに、 M, K は有限要素法における要素質量マトリクス、要素剛性マトリクスであり、 $\{\mathbf{v}^N\}$ は要素各節点の変位速度列ベクトルである。 $K_c, \{\mathbf{f}\}$ は上下負荷面摩擦モデルより以下のように示すことができる。

$$K_c = \begin{cases} \int_{S_c} [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] dS & \dots \text{負荷時} \\ \int_{S_c} [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] dS & \dots \text{除荷時} \end{cases} \quad (3)$$

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{cases} \int_V [N]^T \{\mathbf{b}\} dV + \int_{S_t} [\tilde{N}]^T \{\mathbf{t}_t\} dS + \int_{S_c} \left\{ -[\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} + C^c [\tilde{N}] \{\mathbf{t}\} \right\} dS & \dots \text{負荷時} \\ \int_V [N]^T \{\mathbf{b}\} dV + \int_{S_t} [\tilde{N}]^T \{\mathbf{t}_t\} dS + \int_{S_c} \left\{ -[\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} \right\} dS & \dots \text{除荷時} \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 $[N], [\tilde{N}]$ は有限要素法の形状関数に由来するマトリクスであり、 $\{\mathbf{b}\}, \{\mathbf{t}_t\}$ は連続体に作用する既知の物体力と応力速度である。 $[\mathbf{C}^{ep}], [\mathbf{C}^e], C^c$ は上下負荷面摩擦モデルに由来する項であり、表記法は Toyoda et al.¹⁾に準拠する。 $\{\mathbf{v}_m^N\}$ は要素境界上における母材速度の係数列ベクトルである。

$$\dot{\mathbf{f}}_c = \left(\mathbf{C}^e - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes \left(\frac{\alpha_n R \mu_k}{R^*} \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t} \right)}{\alpha_t + \frac{U(R) \mu_k \|\mathbf{f}_n\|}{R^*} - R \kappa \left(\frac{1}{R^*} - 1 \right)^m \|\mathbf{f}_n\|} \right) \bar{\mathbf{v}} + \frac{\alpha_t \eta R \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*} \right)^n \|\mathbf{f}_n\|}{\alpha_t + \frac{U(R) \mu_k \|\mathbf{f}_n\|}{R^*} - R \kappa \left(\frac{1}{R^*} - 1 \right)^m \|\mathbf{f}_n\|} \mathbf{t} \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は接触面の外向き法線ベクトル、 $\mathbf{t} \equiv \mathbf{f}_t / \|\mathbf{f}_t\|$ はすべり方向の単位ベクトル、 $\mathbf{f}_t$ は接触力 $\mathbf{f}_c$ の接線方向成分（摩擦力）、 $\mathbf{f}_n$ は接触力 $\mathbf{f}_c$ の法線方向成分（垂直抗力）、 $\bar{\mathbf{v}}$ は接触面での相対速度ベクトルである。 $\mathbf{C}^e = -\alpha_n (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ は接触に関する弾性係数テンソル、 α_t, α_n はペナルティ係数、 $U(R) = -r \ln R$ 、 $1/R^*$ は構造の程度、 $1/R$ は過圧密比、 μ_s は静止摩擦係数、 μ_k は動摩擦係数、 r, m, n, κ, η は材料定数、上付き $\circ$ は共回転微分を表す。以上を踏まえ、式(1)を Wilson- θ 法により時間離散化して得られる連立方程式を陰的に解き、次刻の状態を予測する。

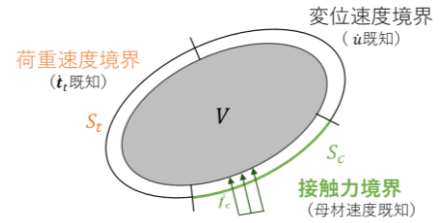


図 1 接触力境界を考慮した境界条件

3. 単純せん断における法線応力分布の影響

3.1 解析条件（動的平面ひずみ解析）

図3に示すような1m×1mの弾性体10要素の上面を完全固定、底面を接触力境界とし、底面で解析対象と接触する母材に水平変位速度 v_m （0.001 m/s で一定）を与えた。使用した各種パラメータおよび初期条件は表2の通りである。ただし、時間依存性上下負荷面摩擦モデルの各種パラメータは有限要素法の積分計算に用いる接触面上のガウス点ごとに定義することで、1つ要素を構成する辺上での状態量分布をも捉えることが可能となる。

3.2 解析結果

時間経過に伴う解析対象の変形を図4に示す。図5では図3に示した接触面両端の節点での水平変位－時間関係と、両端の辺上での摩擦力－時間関係を示している。図4は図5の灰色ハッチ付近の時刻の変形を取り出したものである。底面に作用する摩擦力によってせん断変形を受けている解析対象は、時刻610 sec 時点では領域全体で概ね一様にせん断変形が進行しているが、615 sec の段階で右端からすべりが生じる。解析対象の左側の底面においては右端が受け持っていた力を一部負担することとなり（応力分布の再配置）、解析対象の弾性力が摩擦力を上回るため、620 sec では左端においてもすべりを生じ、すべりが模型全体に伝播することとなる。本解析では、右端から左端へのすべり伝播現象および摩擦力増減が周期的に発生する結果が解かれた。

表2 各種パラメータと初期条件

接触面の物性値	
静止摩擦係数 μ_s	0.4
動摩擦係数 μ_k	0.2
接線方向ペナルティ係数 α_t (kPa/m)	1000
法線方向ペナルティ係数 α_n (kPa/m)	1000
発展則パラメータ	
正規圧密度化指数 r	100
軟化速度を規定する材料定数 κ	10
軟化速度を規定する材料定数 m	1
硬化速度を規定する材料定数 η	0.01
硬化速度を規定する材料定数 n	1
弾性体パラメータ	
弾性係数 E (N/m ²)	1.0×10^3
ポアソン比 ν	0.0
密度 ρ (g/cm ³)	1.0
初期条件	
初期の構造の程度 R_0^*	0.5
初期摩擦力 f_{t0} (Pa)	1.0×10^{-7}
初期垂直抗力 f_{n0} (Pa)	1000

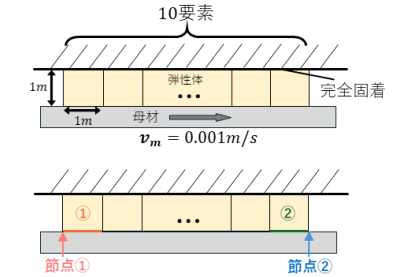


図3 解析条件

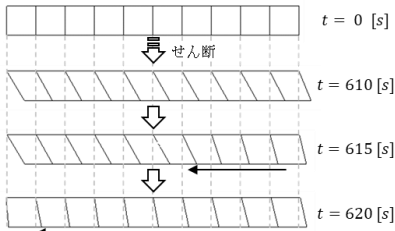
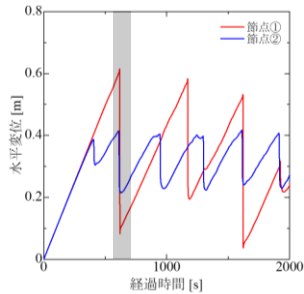
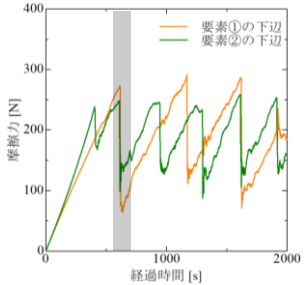


図4 解析結果（変形図）



(a) 各節点の水平変位－時間関係



(b) 摩擦力－時間関係

図5 解析結果（時刻歴）

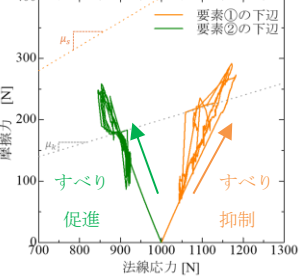


図6 摩擦力－法線応力関係

3.3 右側からすべりが生じる理由

解析対象が右側からすべり始めた理由について考察する。初期段階では物体全体で一様なせん断変形が進行するが、実は接触面での法線応力分布は非一様に変化してゆく。せん断変形は物体の主軸方向の伸長・圧縮に分解されるが、せん断変形に伴い圧縮を受ける物体右下の接触面（図3 緑面）では法線応力が減少してゆく（図6）。その結果、法線応力減少によりすべりが促進される右側が先にすべり出すこととなる。これは、別報³⁾において提案モデルにより法線応力の減少・増加によるすべりの促進・抑制を表現可能であることを述べたが、すべり伝播現象は同モデルを初期境界値問題に導入したことで初めて解かれるものである。

4. おわりに

本稿では、著者らの提案した上下負荷面摩擦モデルを弾性体の速度型動的微小変形解析の接触力境界において導入し、境界条件の非線形性により齎されるすべりの非一様分布と時間発展について考察した。とくに、物体の変形に伴う接触面での法線応力の増減が接触面内のすべりの伝播機構に影響を与えることを明らかにした。これは、地球物理学の分野で提唱されている断面面内の真に接触している部分（アスペリティ）の分布が時間とともにどのように発展するかを記述できる可能性を秘めており、今後は断面面における地震発生機構のモデル化に向けた研究を実施していく予定である。

謝辞 本研究は、科学研究費補助金（基盤研究(B)：課題番号 22H01586）の助成を受けて実施した。

参考文献）

1) Toyoda, T., Yasuike, R., Noda, T. (2024): Super/sub-loading surface model..., Tribology International, 191, 109080.
2) 安池, 豊田, 野田 (2024): 時間依存性・上下負荷面摩擦モデルの..., 第29回計算工学講演会, 発表予定.
3) 野田, 安池, 豊田 (2024): 一次元質点～バネ系を用いた時間依存性上下負荷面..., 第59回地盤工学発表会, 投稿済.