

完全排水・非排水条件下にある海底弾性地盤の波浪作用時応答の理論解導出

海底液状化，透水性，理論解

名古屋大学 正会員
国際会員○飯島琢臣
豊田智大 野田利弘

1. はじめに

Yamamoto¹⁾は，Darcy 則を基に有限な値の透水係数を有する海底地盤の波浪外力作用下の弾性応答の理論解（定常解）を導出している．しかしながら，透水係数が十分に大きいまたは小さい場合，すなわち海底地盤が完全排水または非排水に近づく場合については，単純に Yamamoto の理論解の透水係数 $k \rightarrow \infty, 0$ の極限をとることによって，解の導出が不可能であり，波浪作用下の海底地盤変形における透水性の影響を十分に評価できない．本稿では，Yamamoto の理論解の導出方法を参照して，波浪外力作用下で海底地盤が完全排水（透水係数が ∞ ）と完全非排水（透水係数が 0 ）となる下での理論解を新たに導出する．なお，詳細は別報²⁾に譲るが，得られた理論解は，周期変位・水理境界を導入した数値解析解と同じになっていることを追記する．

2. 波浪外力作用下の海底地盤の排水性に応じた理論解

2.1 Yamamoto の理論解（透水係数有限）の導出の概要 Yamamoto による理論解は，正弦波で表される波浪外力の下での水平方向に無限，鉛直方向に有限に堆積した海底地盤の定常解を記述したものである．支配方程式として次の微小変形弾性体の力のつり合い式(1)と Darcy 則による間隙水の圧縮性を考慮した連成式(2) から，二次元平面ひずみおよび自重を考慮の条件下で導出される．

$$G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \frac{\partial \Delta u_w}{\partial x}, \quad G \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \frac{\partial \Delta u_w}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 \Delta u_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta u_w}{\partial z^2} \right) = \frac{n}{K_f} \frac{\partial \Delta u_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \quad (2)$$

ここに， x 軸は波の進行方向（水平方向）に対して逆向きを正， z 軸は海底面をゼロとして鉛直方向下向きを正とする．また， t は時間， G はせん断剛性， ν はポアソン比， k は透水係数， γ_w は間隙水の単位体積重量， n は間隙比， K_f は間隙水の体積弾性係数， ξ, ζ はそれぞれ x 軸， z 軸方向の土骨格の変位， Δu_w は水圧増分を表す．ここで，各方向変位と水圧増分について， x 軸方向の周期性を仮定し， x 軸， z 軸方向に変数分離した複素数解を下記のように表現する．

$$\xi = U(z)e^{i(\lambda x + \omega t)}, \quad \zeta = W(z)e^{i(\lambda x + \omega t)}, \quad \Delta u_w = P(z)e^{i(\lambda x + \omega t)} \quad (3)$$

ここに， U, W, P は各諸量の z 軸成分の関数で， λ ($= 2\pi/L$: L は波長) は波数， ω ($= 2\pi/T$: T は周期) は角周波数である．

ここで式(3)を式(1),(2)に代入し， z 軸方向の微分演算子 $D = d/dz$ を用いて，特性方程式を作ると式(4)が得られる．

$$(D^2 - \lambda^2)^2 (D^2 - \lambda'^2) = 0, \quad \lambda' = \lambda \left(1 + i \frac{\omega}{c\lambda^2} \right)^{1/2}, \quad c = \frac{k}{\gamma_w} / \left(\frac{n}{K_f} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \right) \quad (4)$$

したがって， U は式(5)のように係数を $a_1 \sim a_6$ とした 6 つの固有モードの重ね合わせで表現される． W, P も同様に，それぞれ異なる係数 $b_1 \sim b_6, c_1 \sim c_6$ で表現できるが，これらは，支配方程式(1)(2)に代入すると，全て $a_1 \sim a_6$ で表現できる．

$$U = a_1 \cosh(\lambda z) + a_2 \sinh(\lambda z) + a_3 z \cosh(\lambda z) + a_4 z \sinh(\lambda z) + a_5 \cosh(\lambda' z) + a_6 \sinh(\lambda' z) \quad (5)$$

次に，海底地盤表面 ($z = 0$) と最下端 ($z = d, d$ は層厚) に関する計 6 つの境界条件式(6),(7)に，上式(5)と $a_1 \sim a_6$ で表現される W, P を代入することで， $a_1 \sim a_6$ に関する連立方程式を得る．これを解いて海底地盤の各種応力増分，水圧や変位を表現する．なお，下記 2.2, 2.3 においても同様のプロセスで完全排水下と完全非排水下での理論解を導出する．

$$\Delta u_w = u_{w0} e^{i(\lambda x + \omega t)}, \quad \Delta \sigma'_z = \frac{2G}{1-2\nu} \left((1-\nu) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = 0, \quad \Delta \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{at } z=0 \quad (6)$$

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \frac{\partial \Delta u_w}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=d \quad (7)$$

ここに， u_{w0} は波圧振幅， $\Delta \sigma'_z$ は鉛直有効応力増分， $\Delta \tau_{xz}$ はせん断応力増分である．

2.2 完全排水の理論解 透水係数が十分に大きい（透水係数が ∞ ）場合，連成式(2)は式(8)のように水圧に関するポアソン方程式となる．

$$\frac{\partial^2 \Delta u_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta u_w}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

Yamamoto の理論解導出時と同様に， $\xi, \zeta, \Delta u_w$ について x, z 方向に変数分離し，支配方程式に代入して z 方向微分演算子 D を用いた特性方程式を作ると，式(9)が得られる．

$$(D^2 - \lambda^2)^3 = 0 \quad (9)$$

従って， U は式(10)のようになり， W, P も同様に異なる係数 $b_1 \sim b_6, c_1 \sim c_6$ で表現できる．

$$U = a_1 \cosh(\lambda z) + a_2 \sinh(\lambda z) + a_3 z \cosh(\lambda z) + a_4 z \sinh(\lambda z) + a_5 z^2 \cosh(\lambda z) + a_6 z^2 \sinh(\lambda z) \quad (10)$$

再び，支配方程式に代入して係数比較を行うと， $a_1 \sim a_4, b_1, b_2$ を用いて，式(11)のようにその他の係数を表現することができる．つまり，6 つの固有モードが結果的に 4 つの固有モードで表現できる．最後に境界条件式(6),(7)に U, W, P を代入することで， $a_1 \sim a_4, b_1, b_2$ に関する連立方程式を得る．

$$a_5 = 0, \quad a_6 = 0, \quad b_3 = -ia_4, \quad b_4 = -ia_3, \quad b_5 = 0, \quad b_6 = 0, \quad c_1 = \frac{G}{1-2\nu} \{ i\lambda a_1 - i(3-4\nu)a_4 + \lambda b_2 \} \\ c_2 = \frac{G}{1-2\nu} \{ i\lambda a_2 - i(3-4\nu)a_3 + \lambda b_1 \}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0 \quad (11)$$

2.3 完全非排水の理論解 透水係数が十分に小さい（透水係数が 0 ）場合，連成式(2)は右辺が残る形で式(12)となる．

$$\frac{n}{K_f} \frac{\partial \Delta u_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = 0$$

(12)

ここでも、 $\xi, \zeta, \Delta u_w$ について x, z 方向に変数分離して支配方程式に代入すると、特性方程式は式(13)となる。

$$(D^2 - \lambda^2)^2 = 0$$

(13)

したがって、 U は式(14)となり、 W, P も同様に係数 $b_1 \sim b_4, c_1 \sim c_4$ で表現する。

$$U = a_1 \cosh(\lambda z) + a_2 \sinh(\lambda z) + a_3 z \cosh(\lambda z) + a_4 z \sinh(\lambda z)$$

(14)

再び支配方程式に代入して得られる、係数 $a_1 \sim a_4$ とその他の係数との関係は式(15)となる。

$$b_1 = -ia_2 + iA_1a_3, \quad b_2 = -ia_1 + iA_1a_4, \quad b_3 = -ia_4, \quad b_4 = -ia_3$$
$$c_1 = -iA_2a_4, \quad c_2 = -iA_2a_3, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0$$

(15)

$$A_1 = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{nG}{K_f} \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \right) / \left(1 + \frac{nG}{K_f} \frac{1}{1-2\nu} \right), \quad A_2 = 2G / \left(1 + \frac{nG}{K_f} \frac{1}{1-2\nu} \right)$$

さらに、4つの境界条件式(16),(17)に U, W, P を代入して、係数 $a_1 \sim a_4$ に関する連立方程式を解くと式(16),(17)を得る。

$$\Delta \sigma_z = \Delta \sigma'_z + \Delta u_w = u_{w0} e^{i(\lambda x + \omega t)}, \quad \Delta \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{at } z=0$$

(16)

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0 \quad \text{at } z=d$$

(17)

ここに、 σ_z は鉛直全応力である。式(16)一つ目より、地表で水圧が未定乗数法的にきまり、波圧と不連続になる。

2.4 地盤の透水性に応じた理論解と考察 地盤の透水性に応じた理論解の特徴を示す。解析条件は Yamamoto に倣い、層厚 $d=25\text{m}$ で、砂の物性値と波浪外力条件は表 1 に示す。海底地盤の部分排水のケースは、Yamamoto の理論解において透水係数を $k = 10^{-4} \text{ [m/s]}$ とした。解析結果として、図 1 に各応力増分、水圧増分と変位について、波浪の一周期作用間の最大値の鉛直分布を示す。同図より以下のことが言える。

- ・せん断応力増分 $\Delta \tau_{xz}$ 、軸差応力増分 Δq 、 x 軸、 z 軸両方向の変位 ξ, ζ は、地盤の透水性によって大きく変化しない。
- ・透水性が小さい程、地表に向けて水圧増分 Δu_w が小さくなる、一方、鉛直有効応力増分 $\Delta \sigma'_z$ は値が大きくなる。これは、式(16)の完全非排水時の境界条件として、海底表面で全応力が波浪外圧と等しくなる条件を与えたことによる。
- ・透水性が大きい程、水平有効応力増分 $\Delta \sigma'_x$ 、平均有効応力増分 $\Delta p'$ ともに、地表に向けて大きな値を示した。この事実は、従来の海底地盤液状化予測では、 $\Delta \sigma'_z$ が初期鉛直有効応力を超えるか否かで評価していたが、これは適切ではなく、 $\Delta p'$ と初期平均有効応力の関係で評価すべきということを示唆する。なぜならば、従来の手法では、非排水的な地盤である程、液状化しやすいという結果を示すのに対し、より液状化に起因する応力普遍量としての $\Delta p'$ で評価すると、排水的な地盤が液状化しやすいという逆の結果を与えるからである。

表 1 物性値、外力条件

物性値	
間隙率 n	0.3
ポアソン比 ν	0.333
水の体積弾性係数 K_f [kN/m ³] ※	infinity
水の単位体積重量 γ_w [kN/m ³]	9.81
外力条件	
波高 H [m]	24.0
境界圧振幅 $u_{w0}(=H\gamma_w/2)$ [kPa]	57.0
周期 T [s]	15.0
角速度 $\omega (=2\pi/T)$ [rad/s]	0.483
波長 L [m]	324.0
波数 $\lambda (=2\pi/L)$ [rad/m]	0.019
波速 $C(=L/T)$ [m/s]	21.6

※飽和状態（間隙水の非圧縮）を仮定

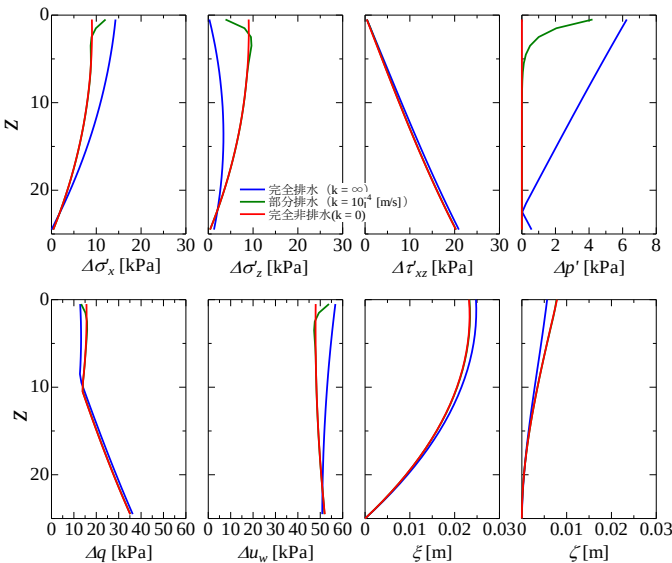


図 1 有効応力増分、水圧増分、変位の最大値の鉛直分布

3. おわりに

本稿では、Yamamoto が導出した波浪外力作用下の海底地盤応答理論解を参照して、完全排水（透水係数 ∞ ）と完全非排水（透水係数 0）の条件下の理論解を導いた。完全排水、非排水の理論解はともに、部分排水的な地盤挙動を捉える Yamamoto の理論解よりも固有モードが二つ少なくなることが分かった。さらに、排水性に応じた応力・変位諸量の最大値の鉛直分布をみると、せん断応力・変位は地盤の透水性によって大きな差が見られなかったのに対し、平均有効応力増分 $\Delta p'$ は排水的である程、鉛直有効応力増分 $\Delta \sigma'_z$ は非排水的である程、地表で大きな値を示した。これにより、海底地盤液状化予測手法として $\Delta p'$ を用いて評価する重要性が示唆された。今後は、弾塑性に加えて有限変形の解析において地盤の透水性が異なる計算を実施し、海底地盤液状化に地盤の透水性が及ぼす影響について調べ、ひいては海底地盤液状化予測手法の高度化につなげてゆきたい。

参考文献)

1) Yamamoto, T. et al (1977): WAVE INDUCED INSTABILITY IN SEABEDS, Proc. Coastal Sediments '77 AXE, 1977, pp. 898-913

2) 飯島, 豊田, 野田(2024): 水理周期境界導入のための要素境界水圧を陽に…, 第 29 回計算工学講演会, submitted.