

Darcy-Brinkman 方程式に基づく陰的 w - p 飽和浸透流解析の開発と流体粘性による流れの非ダルシー性の理解

浸透 Darcy-Brinkman 方程式 陰解法

名古屋大学 特別会員 ○松原 優作

国際会員 豊田 智大, 野田 利弘

1. はじめに

現在の水～土骨格連成解析の大半は、間隙水の浸透が準静的であることを仮定する u - p formulation によって行われている。しかし、 u - p formulation では間隙水が動的に浸透しうる高透水性土の連成問題や非常に小さな時間刻みを要する不安定化問題に対しては適用困難に陥ることが報告されている。この問題を克服するため、筆者らは間隙水の相対加速度・相対移流を考慮した u - w - p formulation に基づく水～土骨格連成解析手法を開発してきた¹⁾。本研究では、同手法における流体モデルのさらなる高度化に向け、流体粘性を考慮した Darcy-Brinkman 方程式（以下、D-B 方程式と記す）を解く流体解析手法を「地盤の変形解析と連成することを念頭に置いて」開発し、その適用性を検証した。本稿ではさらに、高透水性土において生じる間隙流体の粘性に起因した流れの非ダルシー性について示す。

2. 定式化手法の概要

u - w - p formulation は、混合体理論に基づく水～土骨格連成問題の支配方程式(1-1)~(1-3)を直接解く手法である¹⁾。

$$\text{飽和土の運動方程式（速度型）： } \rho_s D_s^2 \mathbf{v}_s + \rho_f D_s D_f \mathbf{v}_f + \rho^f (\text{div } \mathbf{v}_s) (D_s \mathbf{v}_s - \mathbf{b}) = \text{div} (D_s \mathbf{S}_t) \quad (1-1)$$

$$\text{間隙水の運動方程式： } \rho^f D_f \mathbf{v}_f = -\gamma_w \text{grad } h - \frac{\gamma_w}{k} \mathbf{w} \quad (1-2)$$

$$\text{水～土骨格連成式： } \text{div } \mathbf{v}_s + \text{div } \mathbf{w} = 0 \quad (1-3)$$

ここに、 ρ , ρ_s , ρ_f , ρ^f は混合体、固相、液相、間隙水の密度、 D_s , D_f は固相、液相に着目した物質時間微分、 $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_f$ は固相、液相の速度、 $\mathbf{w} = n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$ は間隙水の相対平均流速、 $\mathbf{b}$ は物体力、 $D_s \mathbf{S}_t$ は公称応力速度、 $h = z + p/\gamma_w$ は全水頭、 p は間隙水圧、 z は位置水頭、 n は間隙率、 k は透水係数、 γ_w は水の単位体積重量である。ここで、土骨格が空間に固定されていること ($\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$)、間隙率一定、間隙水の非圧縮性を仮定し、間隙水の運動方程式において流体粘性項を考慮することにより、(1-2)~(1-3)を変形した方程式(2-1)~(2-2)が得られる。

$$\text{間隙水の運動方程式： } \rho^f D_f \mathbf{v}_f = -\gamma_w \text{grad } h - \frac{\gamma_w}{k} \mathbf{w} + \mu \Delta \mathbf{w} \quad (2-1)$$

$$\text{流量連続式： } \text{div } \mathbf{w} = 0 \quad (2-2)$$

ここで、 μ は液相の粘性を表し、真の流体粘性 μ_{real} を用いて $\mu = n\mu_{\text{real}}$ と表される。式(2-1)は D-B 方程式²⁾に相当し、左辺が慣性項、右辺第1項が動水勾配項、第2項が土骨格から受ける Darcy 抵抗、第3項が流体の粘性抵抗を表す。流体のみに占有された領域 ($n = 1, k \rightarrow \infty$) では Navier-Stokes 方程式（以下、N-S 方程式と記す）に、準静的な流れ ($k \rightarrow 0, D_f \mathbf{v}_f \rightarrow \mathbf{0}$) を仮定すると、非定常 Darcy 則にそれぞれ一致する。D-B 方程式の解法には藤澤ら³⁾ (fractional step 法) などの事例があるが、本研究では地盤の変形解析と連成することを念頭に置き、離散化に際し以下の3点を考慮した。

- ・ 混合法：圧力場の安定性の観点から、間隙水圧 p を Christian・田村流による有限体積法で離散化した。一方、 $\mathbf{w}$ は要素境界での流量境界条件の実装性の観点から、有限要素法により離散化した。
- ・ 直接型解法：強連成解析 (u - w - p formulation) を前提に、 $\mathbf{w}$ と p を陽に未知数にとり、方程式(2-1)と(2-2)を連立して解く直接型解法を採用した (⇔分離型解法)。
- ・ 陰解法：地盤の圧密（大域的な解）や大変形問題・不安定化問題への適用性の観点から、陰解法を採用した。陰的時間積分公式として、Wilson- θ 法 ($\theta > 1.37$ で線形問題に対し無条件安定) を用いた。

3. 一次元非定常飽和浸透流の数値解析

本研究では、一次元飽和浸透流の定常状態での流れに垂直な方向の流速分布を求めた。

3.1 有限要素メッシュおよび境界条件

矩形の解析領域（図1）の両端にヘッド差を与えることで発生する水平浸透流を解く。浸透方向に平行な壁面は非排水・non-slip 条件とした。

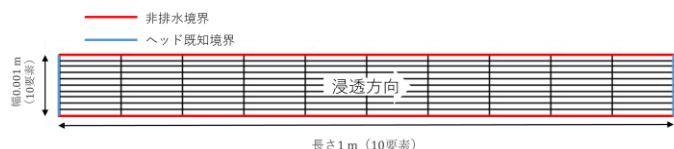


図1 解析メッシュ

3.2 材料定数・初期状態

間隙水および多孔質体の材料定数を表1に示す。解析は、透水係数 k の値を 1.0×10^{-3} cm/s から

1.0×10^5 cm/s まで 10 倍ずつ段階的に増加させた計 9 ケース行った。また、初期相対平均流速は領域全体で $\mathbf{w}(t = 0) = \mathbf{0}$ とし、領域全体で相対平均流速 $\mathbf{w}$ が定常状態に達するまで解析を継続した。

3.3 解析の理論解

式(2-1)に示す Darcy-Brinkman 方程式の鉛直断面での定常水平流速分布の理論解は以下のとおり導かれる。

理論解： $w_x = kI_e \left\{ 1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{nyw}{\mu k}}\left(y - \frac{B}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{nywB}{\mu k}}\right)} \right\}$ (3)

ここで、 B は水路幅、 y は解析領域中央から浸透に垂直な方向への距離を表す。流速分布は図 2 に示すように、低透水係数の際は Darcy 則に従う一様分布になり、透水係数の上昇につれて双曲線から二次曲線（平面 Poiseuille 流）の分布へと移ると考えられる。

3.4 解析結果

図 3 に 3 種類の代表的な透水係数① $k = 1.0 \times 10^{-3} \text{cm/s}$ 、② $k = 1.0 \times 10^0 \text{cm/s}$ 、③ $k = 1.0 \times 10^3 \text{cm/s}$ に対する定常水平流速分布の解析結果を示す。

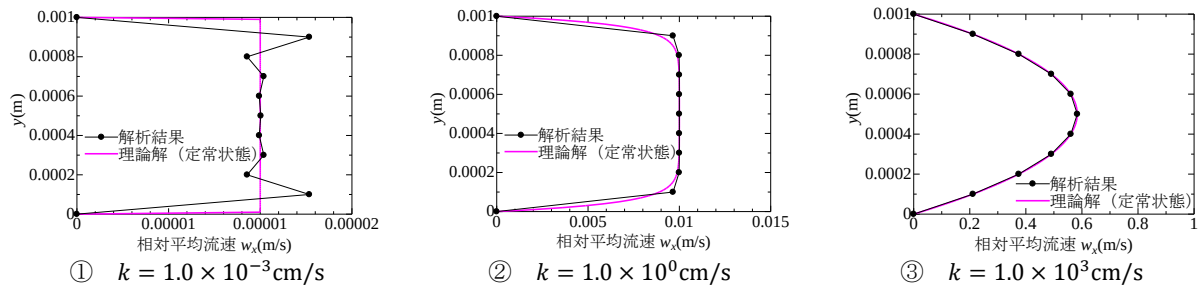


図 3 解析結果（定常水平流速分布）

①では管路の壁面に近づくとき解が振動するという結果となった。これは、低透水性土において速度境界層が薄くなるため（cf. 理論解），壁面近傍の速度勾配を捉えるためにはより高精細なメッシュ分割が必要であることを反映している。あるいは、Darcy 抵抗が十分に大きい低透水性土では、速度の二階空間勾配で記述される粘性抵抗の影響が相対的に限りなく小さくなり、方程式系の空間勾配最高次数が 0 次（非定常 Darcy 則）に近づくため、壁面での non-slip 境界条件が無効となった結果、一様流量を達成するために図 3 ①のような流速分布となったといえる。なお、壁面の境界条件を slip 条件（流体粘性非考慮）とすると一様流速分布が解かれるが、その解は理論解と壁面近傍を除きほぼ一致することから、低透水性土においては、D-B 方程式の流体粘性を無視した解析であっても十分妥当するといえる。②、③では曲線状の定常流速分布が得られた。これは、透水係数が大きい場合、流体粘性の影響が無視できなくなるため、解が Darcy 則にしたがう一様流速分布から乖離してゆくことによる。また、解析結果が理論解と一致することから、本手法の有効性を確認した（Verification）。

次に、図 4 に管路中央の定常流速と透水係数の関係を示す。仮に、流れが常に Darcy 則に従っているとすれば、動水勾配一定のとき、定常状態での相対平均流速は透水係数に比例することとなる。一方、解析結果では Darcy 則には従わず、透水係数が上昇しても相対平均流速が頭打ちとなる結果が得られた。これは、透水係数が大きくなるほど、抵抗力に占める流体粘性の影響が Darcy 抵抗に対し支配的となることによる。このことから、Forchheimer 則に代表されるような高透水性域での非 Darcy 性が流体粘性の影響によって説明できる可能性が示唆された。

4. おわりに

高透水性土に対する本手法の有効性を確認し、非 Darcy 性が粘性の影響によって説明できる可能性を示した。

謝辞 本研究は、科学研究費補助金（若手研究：課題番号 22K14324）の補助を受けて実施した。

参考文献）

1) Noda, T. and Toyoda, T. (2019): Development and verification of a soil-water coupled finite deformation..., S&F, 59(4), 888-904.
2) Bars, M.L. and Worster, M.G. (2006) : Interfacial conditions between a pure fluid and a porous..., J. Fluid Mech., 550, 149-173.
3) 藤澤, 有本, 村上 (2013): Darcy-Brinkman 式を用いた非圧縮性流れと Darcy 流..., 農業農村工学会論文集, 81(5), 419-428

表 1 材料定数・解析条件

材料定数	
水の単位体積重量 $\gamma_w(\text{kN/m}^3)$	9.81
流体粘性 $\mu(\text{mPa} \cdot \text{s})$	1.0
間隙率 n	0.5
透水係数 $k(\text{cm/s})$	Case 毎
解析条件	
動水勾配 I_e	1.0

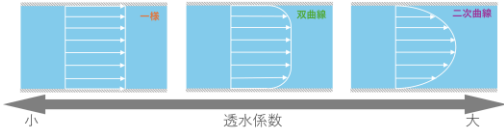


図 2 透水係数に応じた定常流速分布の理論解の変化

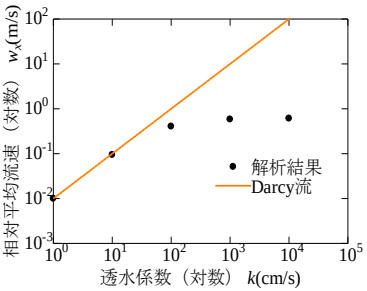


図 4 透水係数と相対平均流速（定常状態）の関係