

水理周期境界導入のための要素境界水圧を 陽に未知数にとる定式化手法の提案

Proposal of a numerical method defining boundary water pressure as unknown variable for introduction of hydraulically periodic condition

飯島琢臣¹⁾, 豊田智大²⁾, 野田利弘³⁾

Takumi Iijima, Tomohiro Toyoda, and Toshihiro Noda

1) 修 (工) 名古屋大学 工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: iijima.takumi.h3@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

2) 博 (工) 名古屋大学 工学研究科 助教 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: toyoda@civil.nagoya-u.ac.jp)

3) 博 (工) 名古屋大学 工学研究科 教授 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: noda@civil.nagoya-u.ac.jp)

A numerical method ($u-p-p_b$ formulation) which treats boundary pressures of ground as unknown variables have been proposed for convenience of controlling various boundary conditions including complex boundary pressures or changeable water flow. In this method, conditions on boundary water flows and boundary pressures are incorporated into $u-p$ formulation to obtain the unknown boundary pressures. The method was applied to the hydraulically periodic condition on side boundaries of seabed under ocean wave loading and it could successfully reproduce the hydraulically periodic behavior expressed by theoretical solutions regardless of permeability of ground.

Key Words : $u-p-p_b$ formulation, Hydraulic Periodic Condition, Finite Volume Method

1. はじめに

飽和地盤の水～土骨格連成解析は、 $u-p$ formulationに基づいて定式化される場合が多く、特に有限要素法にChristian・田村流の物理モデル[1]~[3]を組み合わせる混合法を採用する場合、節点自由度毎の固相変位 u と要素毎の間隙水圧 p を未知数にとる形で定式化される。この場合、領域境界における水理境界条件 (e.g. 非排水境界条件・完全排水境界条件) は、その物理モデルの係数を適切に設定することにより考慮される。しかし、地盤境界において複雑な圧力・流量変動を与える場合は、境界水圧 p_b を陽に未知数にとる定式化の方が、境界条件の制御が容易である。また、波浪と地盤の相互作用解析に代表される流体～地盤連成解析を実現する場合においても、水領域と地盤領域で流量や圧力の連続条件を実装する上で、境界水圧 p_b を自由変数にとる定式化手法が望ましいことは言うまでもない。そこで筆者らは、節点変位 u 、要素水圧 p に加え、新たに境界水圧 p_b を陽に未知数にとる $u-p-p_b$ formulationに基づく定式化手法を開発してきた。

境界水圧を未知数にとる $u-p-p_b$ formulationの恩恵として、水理境界条件の設定の自由度が格段に上がることが挙げられる。従来の $u-p$ formulationでは、境界水圧を既知とする境界条件 (e.g. 完全排水条件) または境界流量を既知とする境界条件 (e.g. 完全非排水境界条件) しか設定することが困難であったが、実は、 $u-p-p_b$ formulationを導入することにより、たとえば、(1)ある面からの流出量とある面への流入量が等しい (流量の収支を与える境界条件)、(2)ある面とある面のヘッド／水圧が等しい (等ヘッド／

等水圧条件) といった境界条件の実装が容易となる。この点については次節で述べる。とくに、(1)(2)を利用することにより、無限水平地盤における「水理周期境界」の実現が可能となる。

本稿では、この $u-p-p_b$ formulationに基づく定式化手法の要諦を示すとともに (2章)、二次元波浪作用下にある半無限水平海底地盤の水～土連成弾性変形解析への「水理周期境界」としての適用事例を示す (3章)。

2. 地盤の境界水圧 p_b を陽に未知数にとる数値解析手法 ($u-p-p_b$ formulation)

a) $u-p-p_b$ formulationの要諦

本稿では、Christian・田村流の有限体積法により離散化された要素境界ごとの境界水圧 p_b を陽に未知数にとる定式化手法を、まずは可能な限り一般性の高い形で示し、その後、具体的な活用事例を紹介する。

まず、領域全体を有限体積法により分割し (図-1)、境界上の n 個の辺にまたがる流量収支に関する条件式を以下の線形な関係式で与える。

$$\sum_{i=1}^n c^i q_b^i = \bar{q}_b \quad (1)$$

ここに、 q_b^i は面 s_i からの流出流量であり、Christian・田村の手法から、境界水圧 p_b^i を用いて表現される[4] (付録を参照)。 c^i は流量収支条件の具体形を設定するためのパラメータ、 $\bar{q}_b$ は境界面の組 S 全体からの正味の流出流量 (既知) である。たとえば、 $c^1 = c^2 = \dots = c^n = 1$ 、 $\bar{q}_b = 0$ とすれば、式(1)は $q_b^1 + q_b^2 + \dots + q_b^n = 0$ となり、 S 全体での流

$\overline{q_{bj}}$ がゼロとなるとして式(5)のように表す.

$$\begin{cases} q_{b1}^1 + q_{b1}^2 = 0 \\ q_{b2}^1 + q_{b2}^2 = 0 \\ \vdots \\ q_{bj}^1 + q_{bj}^2 = 0 \\ \vdots \\ q_{br}^1 + q_{br}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{計} r \text{本} \quad (5)$$

そして、地盤の同じ鉛直位置における左右二つの境界の水圧が等しい条件を式(4)におけるパラメータ d_j^i がゼロとして、式(6)のように表現し、合計 $2r$ 本の条件式を得る. これらを u - p formulationに組み込み、左右端の変位の周期境界(変位周期境界)も同時に考慮することで、系全体として浸透場の水平方向の周期性を表現することができる.

$$\begin{cases} p_{b1}^1 = p_{b1}^2 \\ p_{b2}^1 = p_{b2}^2 \\ \vdots \\ p_{bj}^1 = p_{bj}^2 \\ \vdots \\ p_{br}^1 = p_{br}^2 \end{cases} \quad \text{計} r \text{本} \quad (6)$$

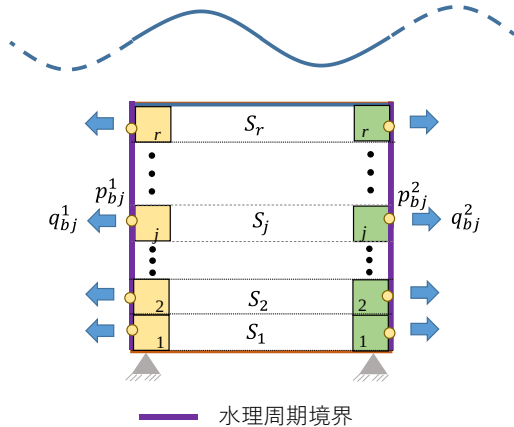


図-4 波浪外力作用下の海底地盤における水理周期境界導入のための条件式

前述したとおり、この手法は左右の境界面における流量の合計がゼロとなることを定式化したものであり、この条件を成立させるもう一つの手段として、両境界要素において、境界方向の水の流れを考慮する際、両端のそれぞれの要素が境界の外側に隣接すると仮定して計算を行うことも可能である(図-5). 先に述べるが、この手段でも上記 u - p - p_b formulationと同様の水理周期境界を課した海底地盤の波浪応答を表現できることを確かめている. この手法は、式の本数が増えないことにより計算負荷が小さくて済む反面、有限変形や境界節点の加速度が優位になる場合等は計算手法が煩雑になるため、本手法の方が簡便である.

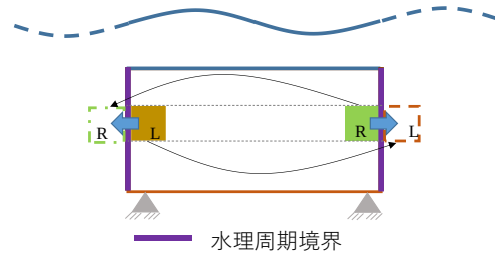


図-5 側面の外側に反対の側面の要素が隣接するとして流量を計算する解析手法

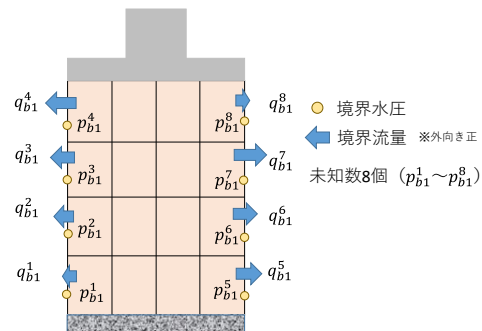
c) u - p - p_b formulationにより実現可能なその他の水理境界条件の例

u - p - p_b formulationの適用可能例として、波浪外力作用下の海底地盤応答における水理周期境界の表現のみならず、以下の項目が考えられる.

- 地震外力(規則波)作用下の地盤応答における周期水理境界条件. 本手法と全く同様に導入できる.
- 平面ひずみ試験における土供試体の境界値問題的応答(図-6). メンブレン内で合計の流量がゼロ、かつメンブレンに接する全ての境界水圧が等しい条件式(7),(8)を与えることで表現できる.

$$q_{b1}^1 + q_{b1}^2 + q_{b1}^3 + q_{b1}^4 + q_{b1}^5 + q_{b1}^6 + q_{b1}^7 + q_{b1}^8 = 0 \quad (7)$$

$$p_{b1}^1 = p_{b1}^2 = p_{b1}^3 = p_{b1}^4 = p_{b1}^5 = p_{b1}^6 = p_{b1}^7 = p_{b1}^8 \quad (8)$$



流量に関する式: 1本

$$q_{b1}^1 + q_{b1}^2 + q_{b1}^3 + q_{b1}^4 + q_{b1}^5 + q_{b1}^6 + q_{b1}^7 + q_{b1}^8 = 0$$

境界水圧差に関する式: 7本

$$p_{b1}^1 = p_{b1}^2 = p_{b1}^3 = p_{b1}^4 = p_{b1}^5 = p_{b1}^6 = p_{b1}^7 = p_{b1}^8$$

図-6 メンブレン内の三軸供試体の挙動

3. 数値解析手法のVerification

周期変位・水理境界を導入した数値解析手法の検証(verification)のために、Yamamotoによる波浪外力作用下の海底地盤応答の理論解[5]を取り上げる. 具体的な導出方法や解の形は省略するが、以下の仮定のもとに導出されており、数値解析においても同様の条件を課した.

- 線形弾性地盤
- 微小変形
- 二次元平面ひずみ

- 水平無限地盤，有限層厚
- 加速度（慣性）の非考慮
- 波浪外力として正弦進行波（水圧と全応力増分）が地盤に垂直に作用
- 底面は水平・鉛直方向変位固定
- 定常解のみに着目
- 間隙水の流れは有限の透水係数 k のDarcy則に従う

さらに，地盤の透水性が変化しても，本数値解析手法が有効であることを示すために，透水係数が十分に大きい，または小さい ($k \rightarrow \infty, 0$) とした条件での理論解を別途導出（その方法については，別報[6]に譲る）し，透水係数を変えた計3ケース ($k = \infty, 10^{-4}, 0$ [m/s]) の数値解析を実施してそれぞれの理論解と比較した。

次に解析に用いた地盤モデルを図-7に示す．図中の x は水平方向右向きを正にとり， z は地盤中央表面から下向きを正にとる．地盤の層厚 d_v はYamamotoに倣い25mとし，水平方向長さ d_H は，二波長分とした。

波浪外力が作用する上端面は排水条件，底面は非排水条件とし，側面は変位周期境界として，左右端での等変位を束縛条件として課した．また水理周期境界として，前述した手法である $u\text{-}p\text{-}p_b$ formulationを用いて，初期鉛直位置が同じ境界での流量の収支がゼロで，境界水圧が等しいという条件を課した．ただし，透水係数をゼロとした非排水的な計算においては，周期水理境界を導入する必要はない。

解析対象として，砂地盤を想定した物性値をYamamotoにならい表-1の通り設定した．波浪外力としての進行波は左端から右向き（ x 軸方向正の向き）に同表の外力条件のとおり与えた。

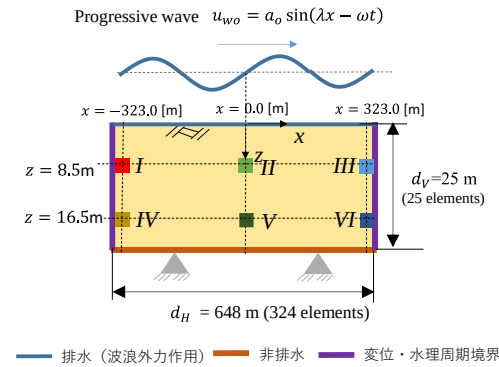


図-7 解析モデル
※ 諸量の時間変化に着目する6地点を黄色と異なる色で塗りつぶしている。

表 1 物性値，外力条件

物性値	
間隙率 n	0.3
ポアソン比 ν	0.333
水の体積弾性係数 K_f [kN/m ³] ※	infinity
水の単位体積重量 γ_w [kN/m ³]	9.81
外力条件	
波高 H [m]	24.0
境界圧振幅 $a_o (= H\gamma_w/2)$ [kPa]	57.0
周期 T [s]	15.0
角速度 $\omega (= 2\pi/T)$ [rad/s]	0.483
波長 L [m]	324.0
波数 $\lambda (= 2\pi/L)$ [rad/m]	0.019
波速 $C (= L/T)$ [m/s]	21.6

※飽和状態（間隙水の非圧縮）を仮定

次に解析結果を示す．図-8,9,10はそれぞれ透水係数 $k = \infty, 10^{-4}, 0$ [m/s]としたときの図-7に示す6か所における波圧振幅 a_o で正規化された水圧増分比 $\Delta u_w/a_o$ ，平均有効応力増分比 $\Delta p'/a_o$ ，軸差応力増分比 $\Delta q/a_o$ の時間変化を表す．同図より，いずれの透水係数においても，またいずれの位置においても，それら全ての諸量の数値解析解は，理論解と一致する，なお変位についても同様に，理論解と数値解析解の変位ベクトル分布（図-11）が一致することを確認している。

以上より，変位・水理周期境界を導入した数値解析手法を用いることで，水平方向に無限に堆積する弾性海底地盤の波浪応答を，地盤の透水係数によらず表現することが可能であることが示された．また，本稿では省略するが，層厚 d_v が大きいほど，また海底地盤の透水性（排水性）が高いほど，水理周期境界を導入せずに側面で非排水条件を課した場合の数値解析解が，理論解から大きく乖離することを確認している．これは透水係数が大きいと，地盤内の水の流れが有意になり，水理周期境界を導入することによる系全体の水の流れの周期性を考慮することが重要になるからである。

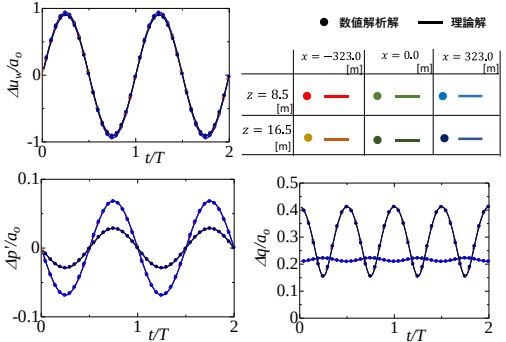


図-8 水圧増分比，平均有効応力増分比，軸差応力増分比の時間変化図 ($k = \infty$)

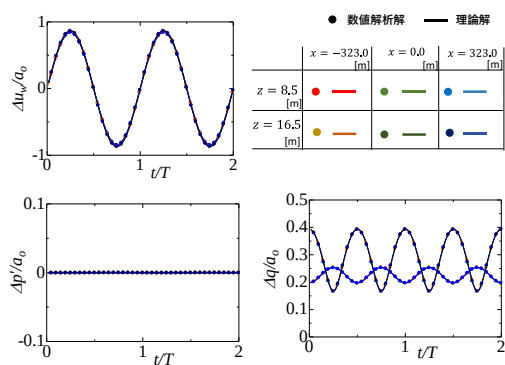


図-9 水圧増分比，平均有効応力増分比，軸差応力増分比の時間変化図 ($k = 10^{-4}$ m/s)

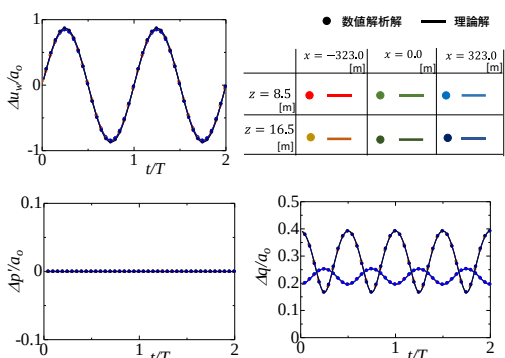


図-10 水圧増分比，平均有効応力増分比，軸差応力増分比の時間変化図 ($k = 0$)

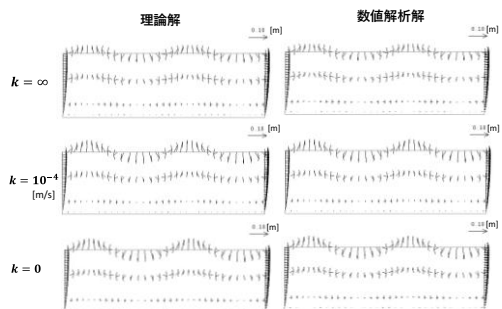


図-11 変位のコンター図※

※1 全て同じ波形の時刻で統一

※2 実際の模型の縦方向長さを8倍としている

4. おわりに

本稿では，波浪作用下の水平無限海底地盤応答における水平方向流量の周期性を考慮するため，Christian 田村流の有限体積法において境界の水圧を陽に未知数にとる定式化手法 ($u-p-p_b$ formulation) を提案した．未知数とした境界水圧の数だけ，流量に関する条件式と境界水圧差に関する条件式を連立することで閉じた方程式系が構築された．

また，地盤の側壁において，同じ鉛直位置における境界からの水の流量の収支が0という条件と境界水圧が等しいという条件を $u-p-p_b$ formulationの下で課し，波浪外力作用下海底地盤応答を求めた．解析は異なる3ケースの透水性 (透水係数 $k = \infty, 10^{-4}, 0$ [m/s]) をもつ地盤を想定し，理論解と数値解析解を比較した．その結果，水圧増分のみ

ならず，平均有効応力増分，軸差応力増分，そして変位のいずれもが理論解と数値解析解で一致し，開発した手法の妥当性を確認し，周期水理境界表現における有用性を示した．

付録: Christian・田村流の有限体積法に基づく具体の $u-p-p_b$ formulation

ある要素Aから隣接する境界iとの間の面 (面積 a_i) に流れる間隙水の質量フラックス q_b^i (図-12) を Christian・田村流の有限体積法で，節点加速度，重力を考慮して式(A1)のように境界水圧 p_b^i を用いて表せる．

$$\begin{aligned}
 q_b^i &= \int_{a_i} \rho_A^f \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}^i da_i \\
 &= -\rho_A^f \alpha_i (p_b^i - p_A) - \rho_A^f \gamma_w \alpha_i (z_b^i - z_A) \\
 &\quad - \rho_A^f k_A \left(\frac{\rho_A^f g}{\gamma_w} - 1 \right) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}^i a_i \\
 &\quad - \frac{\rho_A^f k_A}{\gamma_w} L_B^i \{ \dot{\mathbf{v}}_s^N \}
 \end{aligned} \quad (A1)$$

ここに， ρ_A^f は境界要素Aの間隙水の密度， $\mathbf{w}_i$ は境界方向の相対平均流速， $\mathbf{n}^i$ は境界面での単位法線ベクトル， a_i は境界面の面積 (2次元では線の長さ)， p_A は境界要素の水圧， z_b^i, z_A はそれぞれ境界面の中心と境界要素中心の鉛直座標， k_A は要素Aの透水係数， $\mathbf{e}_3$ は鉛直方向の単位ベクトル， g は重力加速度， $\gamma_w (= 9.81 \text{ kN/m}^3)$ は水の単位体積重量， $\{ \dot{\mathbf{v}}_s^N \}$ は境界面上の節点の加速度ベクトルである． L_B^i は形状関数 N を用いて式(A2)のように表せる．

$$L_B^i = \int_{a_i} \{ \mathbf{n}^i \} [N] da \quad (A2)$$

また，要素からみた境界方向への透水性を表現する α_i は，水理周期境界では排水的であるとして式(A3)で計算する．

$$\alpha_i = \frac{k_A}{\gamma_w} \frac{l_A^i}{l_A^i} \cdot \mathbf{n}^i a_i \quad (A3)$$

ここに l_A^i は境界要素Aから境界面中心へ向かうベクトル， l_A^i はその長さ．

次に式(A1)を式(3)に代入し，時間離散化手法として Wilson- θ 法を適用することにより，式(A4)が導ける．

$$[-L_{bd} \quad H_{pb} \quad -H_{pb}] \begin{Bmatrix} \{ \dot{\mathbf{v}}_s(\theta \Delta t)^3 \} \\ \{ p \} \\ \{ p_b \} \end{Bmatrix} = \{ f_{pb} \} \quad (A4)$$

ここに， $\dot{\mathbf{v}}_s$ は躍度， θ はWilsonの θ ， Δt は時間刻み， p は要素水圧， λ は未定乗数である．その他の係数 L_{bd} ， H_{pb} ， f_{pb} は式(A5)で表わせる．

$$L_{bd} = \frac{\rho_A^f k_A}{2 \gamma_w (\theta \Delta t)^2} L_B^i \quad (A5a)$$

$$H_{pb} = \rho_A^f \alpha_i \quad (A5b)$$

$$\begin{aligned}
 f_{pb} &= a_i \rho_A^f \gamma_w \alpha_i (z_{bi} - z_{Ac}) \\
 &\quad + a_i \rho_A^f k_A \left(\frac{\rho_A^f g}{\gamma_w} - 1 \right) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}^i a_i
 \end{aligned} \quad (A5c)$$

また，式(4)は境界水圧のみの関係として式(12)のように表せる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{pb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{v}}_s(\theta\Delta t)^3\} \\ \{p\} \\ \{p_b\} \end{Bmatrix} = \{d_p\} \quad (\text{A6})$$

ここに I_{pb} は-1か1, d_p はヘッド差による水圧差が与えられる。

最後に式(A4),(A6)を $\mathbf{u}$ - p formulationに組み込むことで、一般形の $\mathbf{u}$ - p - p_b formulationとなる。本稿の波浪作用下の海底地盤の水理周期境界を導入するために、式(A1)を式(5)に代入し、式(6)を連立した条件式により解を導出した。

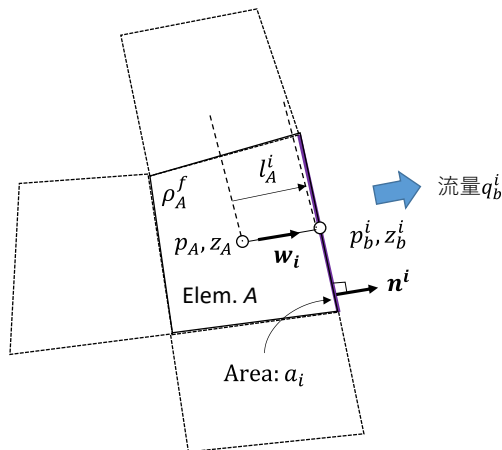


図-12 2次元要素から境界への水の流れ
(Xu [7]を参考)

参考文献

- [1] Christian J.T. (1968) : Undrained stress distribution by numerical method, Proc.ASCE, Vol96,SM6, pp.1333-1345.
- [2] 赤井浩一, 田村武(1978): 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, 第 269 号, pp.98-104.
- [3] Asaoka,A., Nakano, M and Noda, T.(1994): Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, Soils and Foundations, Vol34, No.1, pp.91-105.
- [4] Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M (2008).: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, Soils and Foundations, Vol.48, No.6, pp.771-790.
- [5] Yamamoto, T. (1977): 'Wave induced instability in seabeds', Proc. Coastal Sediments '77 AXE, pp. 898-913.
- [6] 飯島琢臣, 豊田智大, 野田利弘(2024) : 完全排水・非排水条件下にある海底弾性地盤の波浪作用時応答の理論解導出, 第59回全国地盤工学発表会, submitted.
- [7] Xu, B. (2013): 'SOIL-WATER COUPLED FINITE

DEFORMATION ANALYSIS ON QUASI-SEISMIC/SEISMIC WAVE PROPAGATION INSIDE SOIL SPECIMEN AND MULTI-LAYER GROUND', Nagoya University Doctor's thesis.