

接触面の状態変化を記述する上下負荷面摩擦モデルの提案と すべり速度で書かれた塑性乗数による負荷判定の重要性

Proposal of a super/subloading friction model describing state change of contact surface and the importance of loading criterion with plastic multiplier expressed by displacement rate

○共正 野田 利弘^{*1}, 豊田 智大^{*1}, 安池 亮^{*1}
Toshihiro NODA^{*1}, Tomohiro TOYODA^{*1}, Ryo YASUIKE^{*1}
^{*1} 名古屋大学 Nagoya University

In this manuscript, we introduce an elastic-plastic friction model based on the super/subloading surface concept as an extension of the subloading surface friction model by Ozaki and Hashiguchi. In the proposed model, a state in which the static friction coefficient is greater than the kinetic friction coefficient is regarded as a "bulky" state of structure, and the change in the friction coefficient between the static and kinetic frictions at the contact surface is described as the evolution rule of structure. In this paper, the condition imposed on the material constants to ensure the positive definiteness of the denominator of the plastic multiplier has been derived and the importance of the loading criterion based on the numerator of the plastic multiplier represented in terms of the relative displacement rate has been mentioned.

Key Words : Friction, Constitutive modeling, Elasto-plasticity, Loading criterion, stick-slip

1. 緒 言

本報では、著者らの提案した上下負荷面弾塑性摩擦モデル⁽¹⁾を紹介する。同モデルは、尾崎・橋口らの下負荷面摩擦モデル⁽²⁾⁽³⁾を浅岡らの上負荷面概念⁽⁴⁾の導入により拡張したもので、静止摩擦係数が動摩擦係数より大きい状態を構造の「嵩張り」と見做し、接触面における静止摩擦～動摩擦間での摩擦係数変化を構造の発展則として記述している。本稿では、本モデルによりバネ～質点系の stick-slip 現象が再現可能であることを紹介するとともに、塑性乗数の分母の正值性について言及し、すべり速度で書かれた塑性乗数の分子による負荷判定の重要性を指摘する。

2. 上下負荷面摩擦モデルの要諦

まず、上下負荷面モデルに基づく速度型弾塑性摩擦モデルの定式化の要諦を述べる。表記法は尾崎・橋口らの一連の著作⁽²⁾⁽³⁾に倣う。詳細は既報⁽¹⁾に譲る。

2・1 すべり速度の加算分解

母材に対する物体の相対変位速度 $\bar{\mathbf{v}}$ は、接触面の法線方向成分 $\bar{\mathbf{v}}_n$ と接線方向成分 $\bar{\mathbf{v}}_t$ の和に分解される (図 1)。

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_n + \bar{\mathbf{v}}_t, \quad \bar{\mathbf{v}}_n = (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}}, \quad \bar{\mathbf{v}}_t = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{\mathbf{v}} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は接触面における(母材から見た)外向き法線ベクトル、 $\mathbf{I}$ は恒等テンソル、 $(\cdot)$ および $\otimes$ はそれぞれ内積、テンソル積演算子である。一方、 $\bar{\mathbf{v}}$ の弾性成分 $\bar{\mathbf{v}}^e$ と塑性成分 $\bar{\mathbf{v}}^p$ への加算分解は次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^e + \bar{\mathbf{v}}^p, \quad \bar{\mathbf{v}}_n = \bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_n^p, \quad \bar{\mathbf{v}}_t = \bar{\mathbf{v}}_t^e + \bar{\mathbf{v}}_t^p \quad (2)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{v}}_n^e$ 、 $\bar{\mathbf{v}}_n^p$ および $\bar{\mathbf{v}}_t^e$ 、 $\bar{\mathbf{v}}_t^p$ はそれぞれ $\bar{\mathbf{v}}_n$ と $\bar{\mathbf{v}}_t$ の弾性成分、塑性成分である。

2・2 弾性構成式

弾性成分 $\bar{\mathbf{v}}^e$ については、速度型構成式を次式で与える。

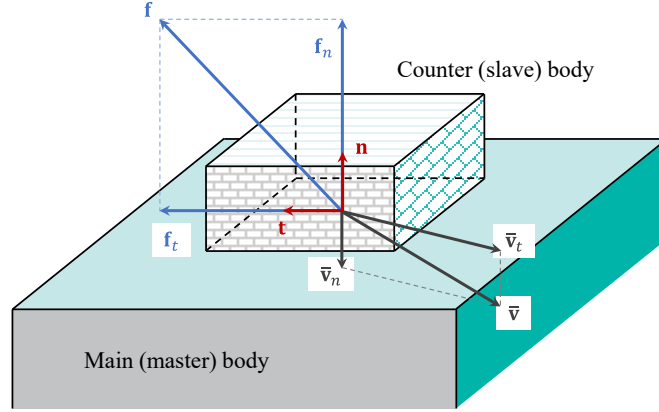


Fig 1 Decomposition of contact traction and sliding velocity (referring Ozaki and Hashiguchi⁽³⁾)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}_n = -\alpha_n \bar{\mathbf{v}}_n^e \\ \dot{\mathbf{f}}_t = -\alpha_t \bar{\mathbf{v}}_t^e \end{cases} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{f}_n$ 、 $\mathbf{f}_t$ は接触力 $\mathbf{f}$ の法線・接線方向成分である。 α_n 、 α_t は接触面の正の弾性定数であり、接触解析におけるペナルティ係数に相当する。式(3)中の負号は相対変位速度と逆向きに接触力増分を生じることを表す。上付き($\circ$)は共回転速度を表し、接触面上で定義される任意のベクトル $\mathbf{a}$ に対し $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{a}$ を満たす。ここに、上付き($\cdot$)は物質時間微分、 $\boldsymbol{\Omega} \equiv \dot{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}$ は共回転スピテンソルである。

式(3)は、二階の弾性係数テンソル $\mathbf{C}^e$ を用いて、以下のようにも表示できる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}}^e, \quad \mathbf{C}^e = -\alpha_n (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (4)$$

2・3 正規すべり降伏面、すべり上負荷面、すべり下負荷面

橋口らの下負荷面摩擦モデル⁽²⁾⁽³⁾を浅岡ら⁽⁴⁾の上負荷面概念により拡張し、静止摩擦係数が動摩擦係数より大きい状態を構造の「嵩張り」として図2のように表現する。

まず、正規すべり面として、等方的な Coulomb 規準を次式で与える。

$$f_t(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{n}) - F(H) = 0 \quad (5)$$

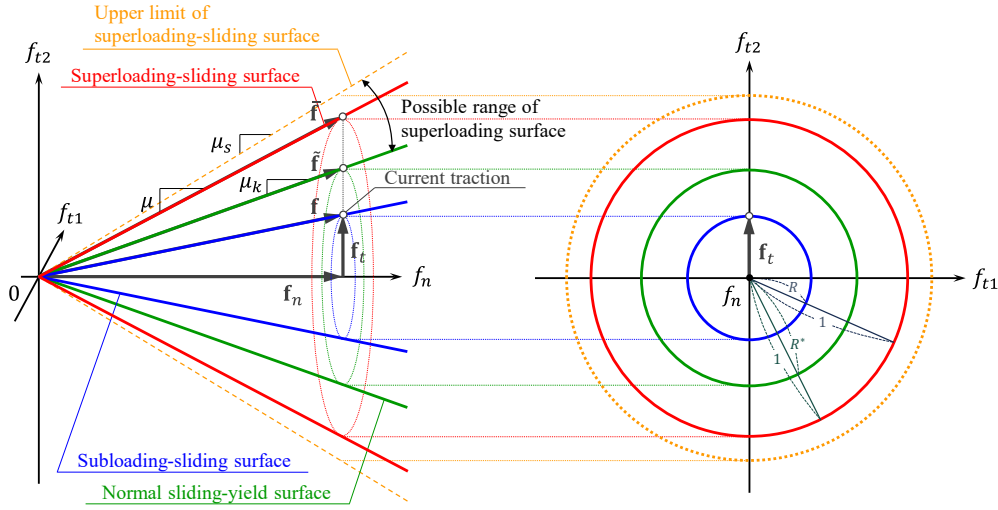


Fig 2 Superloading, subloading, and normal yield surfaces (referring Ozaki and Hashiguchi⁽³⁾)

ここに、 $f_t(\mathbf{f}, \mathbf{n}) = f(\mathbf{f}_t, \mathbf{f}_n) = f_t/f_n$ は正規すべり降伏面、 $f_n = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} > 0$, $f_t = \|\mathbf{f}_t\|$, $\mathbf{f}_t = \mathbf{f} - f_n \mathbf{n}$ である。 $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}_n + \tilde{\mathbf{f}}_t$ は正規すべり降伏面上の接触力を表す。 また、硬化関数 $F(H) = \mu_k$ は動摩擦係数で一定としている。 すなわち、正規すべり面は負荷状態によらず常に一定に保たれる。

次に、正規すべり降伏面上側に「すべり上負荷面」を導入する。 正規すべり降伏面のすべり上負荷面に対する相似比を R^* ($\mu_k/\mu_s \leq R^* \leq 1$, 逆数 $1/R^*$ は構造の程度を表す) とすれば、

$$\tilde{\mathbf{f}}_t = R^* \tilde{\mathbf{f}}_t, \quad \tilde{\mathbf{f}}_n = \tilde{\mathbf{f}}_n \quad (6)$$

となる。これを式(5)に代入すれば、すべり上負荷面として次式を得る。

$$f_t(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{n}) - \frac{1}{R^*} F(H) = 0 \quad (7)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}_n + \tilde{\mathbf{f}}_t$ はすべり上負荷面上の接触力を表す。本モデルでは、この「すべり上負荷面」が、塑性すべりの進展や凝着の回復に伴い時間発展すると考える。すなわち、

- ① 塑性すべりの進展により完全な「動摩擦状態」(摩擦係数: $\mu = \mu_k$) が達成されるとき、構造は完全に喪われ ($R^* = 1$)、上負荷面は下限の「正規すべり降伏面」(動摩擦規準面) まで縮小した状態をとる。
- ② 静置時の凝着回復により完全な「静止摩擦状態」(摩擦係数: $\mu = \mu_s$) が達成されるとき、構造は完全に回復し ($R^* = \mu_k/\mu_s$)、上負荷面は上限の「最大静止摩擦規準面」まで拡大した状態をとる。

これにより、静止摩擦の動摩擦に対する「上回り」が、構造の「嵩張り」としてモデル化されることとなる。なお、土質力学の見地からいえば、構造の嵩張りの下限は「限界状態線」に相当するが、構造の嵩張りに上限が存在する点は、地盤材料における自然堆積土のモデル化と異なる点で興味深い。また、

次に、すべり上負荷面の内側に、現接触力点 $\mathbf{f}$ を含む「すべり下負荷面」を導入する。すべり下負荷面のすべり上負荷面に対する相似比を R ($0 \leq R \leq 1$, R は正規すべり比を表す) とすれば、

$$\mathbf{f}_t = R \tilde{\mathbf{f}}_t, \quad \mathbf{f}_n = \tilde{\mathbf{f}}_n \quad (8)$$

となる。これを式(7)に代入すれば、すべり下負荷面として次式を得る。

$$\mathfrak{F}(\mathbf{f}, R^*, R, H, \mathbf{n}) \equiv f_t(\mathbf{f}, \mathbf{n}) - \frac{R}{R^*} F(H) = 0 \quad (9)$$

ここに、 $\mathfrak{F}$ は降伏関数である。

なお、本稿で紹介する上下負荷面摩擦モデルでは、正規すべり面は時間経過に伴い変化することはないが、既往の下負荷面摩擦モデル⁽³⁾は式(5)の左辺第2項 $F(H)$ を摩擦係数 μ (硬化パラメータ, $\mu_k \leq \mu \leq \mu_s$) とし、塑性すべりに伴う摩擦係数の低下と時間経過に伴う凝着の回復を μ の発展則として与えているため、正規すべり降伏面自体が時間経過に伴い拡大・縮小することとなる。この点が、本モデルと既往モデルで大きく異なる。また、下負荷面は接触面の現接触力点 $\mathbf{f}$ に常に追従する形で変動するが、上負荷面は内部状態変数(構造)の変化によ

$$\lambda = \frac{\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t - \xi^* \frac{R}{R^{*2}} \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*}\right)^n \mu_k f_n - \frac{R}{R^*} \mu_k \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n}{r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k f_n - \kappa^* \frac{R}{R^{*2}} \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \mu_k f_n} \quad (14)$$

$$\Lambda = \frac{\left(\alpha_n \frac{R}{R^*} \mu_k \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t}\right) \cdot \bar{\mathbf{v}} - \xi^* \frac{R}{R^{*2}} \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*}\right)^n \mu_k f_n}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k f_n - \kappa^* \frac{R}{R^{*2}} \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \mu_k f_n} \equiv \frac{\Lambda_N}{\Lambda_D} \quad (15)$$

ここに、 $\lambda = \Lambda$ で、 λ は接触力速度 $\dot{\mathbf{f}}$ で表した塑性乗数、 Λ は相対すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}$ で表した塑性乗数である。

式(2), (3), (10), (12), (13)および式(15)の Λ を用いて、接触力速度 $\dot{\mathbf{f}}$ と相対すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}$ の関係として次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \begin{cases} \mathbf{C}^{ep} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{C}^c \mathbf{t} & \dots \text{負荷のとき } (\bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0}) \\ \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}} & \dots \text{除荷のとき } (\bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0}) \end{cases} \quad (16)$$

ここに、

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes \left(\alpha_n \frac{R}{R^*} \mu_k \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t}\right)}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k f_n - \kappa^* \frac{R}{R^{*2}} \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \mu_k f_n} \quad (17)$$

$$\mathbf{C}^c = \frac{\alpha_t \xi^* \frac{R}{R^{*2}} \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*}\right)^n \mu_k f_n}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k f_n - \kappa^* \frac{R}{R^{*2}} \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \mu_k f_n} \quad (18)$$

である。

2・8 負荷基準

負荷（弾塑性）状態にあるか除荷（弾性）状態であるかについては、相対すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}$ で表した塑性乗数 Λ の正負により判定する。

$$\begin{cases} \Lambda > 0 & \dots \text{負荷 } (\bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0}) \\ \Lambda \leq 0 & \dots \text{除荷 } (\bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0}) \end{cases} \quad (19)$$

一方、負荷時の硬化・軟化・完全塑性を示す負荷状態については λ を用いて考察するが、詳細は既報⁽¹⁾を参照されたい。なお、負荷判定に接触力速度 $\dot{\mathbf{f}}$ で表した塑性乗数 λ を用いないのは、本弾塑性モデルが軟化現象（塑性すべりによる静止摩擦から動摩擦への遷移；負荷時の構造喪失）を呈するため、 λ の符号によって、硬化時の負荷・除荷は区別できても、軟化（負荷）時の負荷・除荷は区別できないことによる。

2・9 塑性乗数 Λ の分母の正値性

本モデルにおいて、塑性乗数 $\Lambda = \Lambda_N / \Lambda_D$ の分母 Λ_D の正値性は、以下の点で重要である。

- Λ_D が正である場合は、式(15)より完全静止状態（ $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ ）においては必ず除荷（ $\Lambda \leq 0$ ）となり、塑性すべりを生じないことから（ $\bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0}$ ）、式(2)より弾性すべりもゼロとなり（ $\bar{\mathbf{v}}^e = \mathbf{0}$ ）、式(4)より接触力変動を生じない（ $\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$ ）ことが保証される。このとき、式(12)において、塑性すべりに伴う構造の喪失は一切生じることなく、ヒーリングによる凝着の回復のみを生じることとなる（ $\dot{R}^* < 0$ ）。
- すべりの進展に伴う負荷状態の変化（負荷 $\rightleftharpoons$ 除荷）が、 Λ_N だけでなく Λ_D の符号反転によっても生じる場合、 $\Lambda_D = 0$ となった時点で Λ が無限大となり、解が破綻する。一方、 Λ_D の正値性が保証されていれば、このような解の破綻を避けられるだけでなく、 Λ_N の正負のみで負荷状態を判定することが可能となる。

そこで、塑性乗数の分母 Λ_D が常に正であることを保証するために材料定数に課される条件式を導出する。

$$\Lambda_D = \Lambda_D(R^*, R) = \alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k f_n - \kappa^* \frac{R}{R^{*2}} \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \mu_k f_n \quad (20)$$

Λ_D を (R^*, R) の二変数関数とみなし、最小値 $\Lambda_{D\min}$ を実現する (R^*, R) を定義域 $\mu_k / \mu_s \leq R^* \leq 1$, $0 \leq R \leq 1$ 内で探索する。まず、

$$\frac{\partial \Lambda_D}{\partial R} = -\frac{r}{R^* R} \mu_k f_n - \frac{\kappa^*}{R^{*2}} \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \mu_k f_n < 0 \quad (21)$$

より、 Λ_D が R について（ R^* , R の定義域内で）単調減少関数であることから、 $\Lambda_{D\min}$ は R の最大値 $R = 1$ で達成されることがわかる。さらに、

$$\frac{\partial(\Lambda_D|_{R=1})}{\partial R^*} = \frac{\kappa^*}{R^{*4}} \{2(1-R^*) + m\} \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^{m-1} \mu_k f_n > 0 \quad (22)$$

より、 $\Lambda_D|_{R=1}$ が R^* について（ R^* の定義域内で）単調増加関数であることから、 $\Lambda_{D\min}$ は R^* の最小値 $R^* = \mu_k/\mu_s$ で達成されることがわかる。以上より、 $\Lambda_{D\min}$ が

$$\Lambda_{D\min} = \Lambda_D(R^* = \mu_k/\mu_s, R = 1) = \alpha_t - \kappa^* \frac{\mu_s}{\mu_k} \left(\frac{\mu_s}{\mu_k} - 1\right)^m \mu_s f_n \quad (23)$$

と求まる。 Λ_D の最小値 $\Lambda_{D\min}$ が非負であれば、 Λ_D が R^* 、 R の定義域全域に亘り正となることが保証される。

$$\Lambda_D = \Lambda_D(R^*, R) > \Lambda_{D\min} > 0 \Rightarrow \alpha_t > \kappa^* \frac{\mu_s}{\mu_k} \left(\frac{\mu_s}{\mu_k} - 1\right)^m \mu_s f_n \quad (24)$$

以上より、 Λ_D の正值性を保証するためには、式(24)を満足する程度に大きなペナルティ係数 α_t を設定すればよいといえる。ただし、ペナルティ係数 α_t には通常十分大きな値が設定されることから、実用上、同条件式は自ずと満足される場合が大半であることを補記しておく。

3. stick-slip 現象の数値解析

本章では、上下負荷面摩擦モデルが下負荷面摩擦モデルと同様の再現能力を有することを確認するため、stick-slip 現象の再現解析を尾崎ら⁽⁵⁾に倣い実施する。

図4に示すばね～質点系について、速度型の運動方程式を次式で与える

$$M\ddot{v}_t = K(V_t - \bar{v}_t) + S\dot{f}_t \quad (24)$$

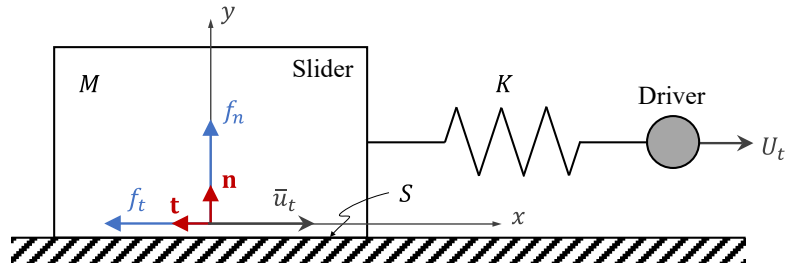


Fig 4 Mass-spring system
(conformed to Ozaki et al.⁽⁵⁾ and Ozaki and Hashiguchi⁽³⁾)

ここに、質量 $M = 10$ (kg)、ばね定数 $K = 10$ (N/m)、接触面積 $S = 1$ (m²)、ドライバー速度 $V_t = \dot{U}_t = 0.001$ (m/s)、静止摩擦係数 $\mu_s = \mu_k/R_0^* = 0.4$ 、動摩擦係数 $\mu_k = 0.2$ 、ペナルティ係数 $\alpha_n = \alpha_t = 1000$ (kPa/mm)、 $m = n = 1$ 、 $r = 100$ (mm⁻¹)、垂直抗力 $f_n = Mg/S = 98.1$ (kPa)、重力加速度 $g = 9.81$ (m/s²)である。物体の運動の時間積分は躍度線形性を仮定する Wilson- θ 法⁽⁶⁾により、 $\theta = 1.4$ とする。解析条件は以下の3ケースとする。

【Case1】 $\kappa^* = 0$ (mm⁻¹)：静止摩擦から動摩擦への遷移を考慮しない、 $\xi^* = 0$ (s⁻¹)：凝着の回復を考慮しない

【Case2】 $\kappa^* = 12.5$ (mm⁻¹)：静止摩擦から動摩擦への遷移を考慮、 $\xi^* = 0$ (s⁻¹)：凝着の回復を考慮しない

【Case3】 $\kappa^* = 12.5$ (mm⁻¹)：静止摩擦から動摩擦への遷移を考慮、 $\xi^* = 0.0025$ (s⁻¹)：凝着の回復を考慮

なお、いずれのケースも塑性乗数の分母 Λ_D の正值性条件（式(24)）を満足しているため、 Λ_N の正負で負荷・除荷を判定している。

解析結果を図5(a)に示す。摩擦係数が一定に保たれる Case 1 では安定すべりが、摩擦力の低下と回復が共に考慮される Case 3 では stick-slip 現象が解かれた。一度低下した摩擦力が回復しない Case 2 では、stick-slip が一度だけ解かれた。いずれの結果も、尾崎らの下負荷面モデルによる解析事例（図5(b)）と同様の傾向を示した。

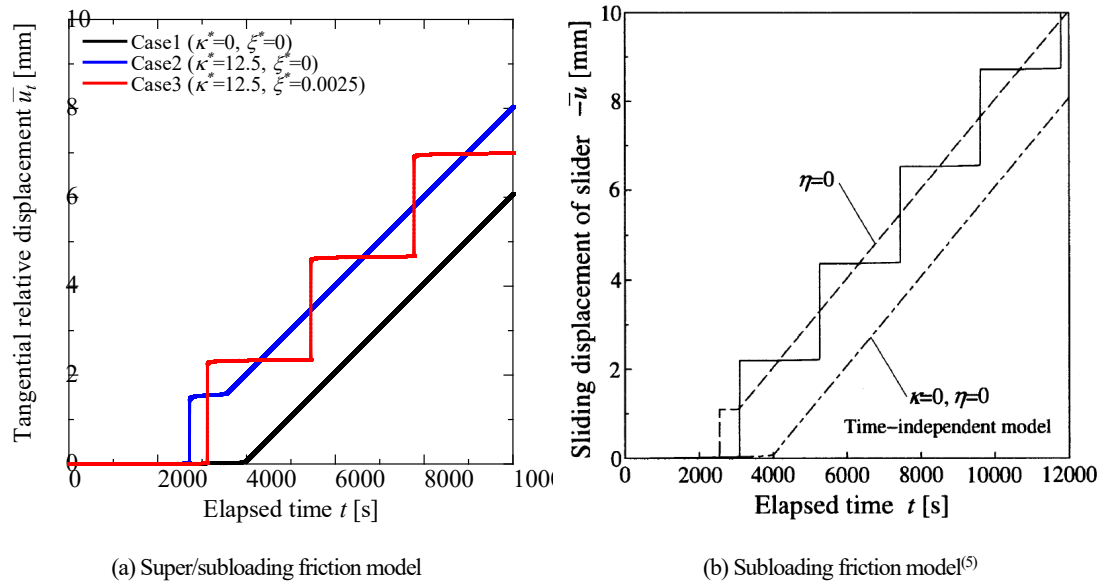


Fig 5 Stick-slip simulations

7. 結 語

本稿では、著者らの提案する上下負荷面摩擦モデルの要諦を示し、塑性乗数 Λ による負荷基準（負荷・除荷判定）の重要性を指摘した。また、 Λ の分母の正値性を保証することの重要性について説明し、正値性を満足するためにパラメータに課される条件式を誘導した。また、既往の下負荷面モデルと同様の Stick-slip 現象が再現可能であることを示した。

謝 辞

本研究は、科学研究費補助金（基盤研究(B)：課題番号 22H01586）の補助を受けて実施した。

文 献

- (1) Toyoda, T., Yasuike, R., and Noda, T., Super/sub-loading surface model for constitutive equation of friction, *Tribology International*, Vol. 191 (2024), 109080.
- (2) Hashiguchi, K., Ozaki, S., and Okayasu, T., Unconventional friction theory based on the subloading surface concept, *Int. J. Solids. Struct.*, Vol. 42 (2005), pp. 1705-1727.
- (3) Ozaki, S. and Hashiguchi, K., Numerical analysis of stick-slip instability by a rate-dependent elastoplastic formulation for friction. *Tribol Int.* Vol. 43 (2010), pp. 2120-2033.
- (4) Asaoka, A., Nakano, M., and Noda, T., Superloading yield surface concept for the saturated structured soils, *Soils Found.*, Vol. 40 (2000), pp. 99-110.
- (5) 尾崎伸吾, 橋口公一, 陳玳行：時間依存性摩擦構成式を用いたスティック・スリップ運動の安定性に関する検討, 応用力学論文集, Vol. 10 (2007), pp. 111-116.
- (6) Noda, T., Asaoka, A., and Nakano, M., Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, *Soils Found.*, Vol. 48 (2008), pp. 771-790.