

水～土連成解析における $u-p$ formulation の理論解の無条件収束性

水～土連成 $u-p$ formulation 安定性

名古屋大学 国際会員 ○豊田 智大, 野田 利弘

1. はじめに

飽和地盤の水～土連成解析は、間隙水の静的浸透を仮定する $u-p$ formulation（以降、単に $u-p$ と記す）により定式化されることが多い。しかし、同手法で得られる解は、地盤の透水係数が大きい場合など、間隙水の相対加速度の影響が無視できない場合には発散することが知られている。そこで著者らは、間隙水の動的浸透と相対移流を考慮した Full formulation（以降、単に Full と記す）に基づく解析手法を開発するとともに、その解の性質について考察してきた^{1),2)}。

本稿では、一次元問題を例にとり、 $u-p$ の不安定性が支配方程式を時間離散化した際にはじめて生じるものであって、理論解自体は無条件収束性を有することを示す。この事実、 $u-p$ の不安定性はもっぱら数値解析的なものであり、系が本質的に有する不安定性ではないことを意味する。ただし、 $u-p$ の数値不安定性についての議論は別報³⁾に譲り、ここでは $u-p$ の理論解の無条件収束性のみを示す。また、導出した $u-p$ の理論解の特徴について Full と対比しつつ述べる。

2. 水～土連成問題の支配方程式と理論解

ここでは、 $u-p$ の解の安定性のみに着目するため、地盤は微小変形弾性体とし、材料非線形および幾何非線形性に由来する解の不安定化は議論の対象としない。また、本稿では地盤の一次元変形（圧密～圧縮波伝播）の理論解に着目するが、これは微小変形弾性体において、せん断波は水圧発生に寄与しないため、 $u-p$ の安定性に一切の影響を与えないことによる。また、簡単のため自重および土粒子・間隙水の圧縮性を無視した場合の理論解を示す。

一次元地盤における Full および $u-p$ の支配方程式は、位置 z と時間 t に関する偏微分方程式として次式で与えられる。

Full formulation

- 混合体の運動方程式

$$\rho_s \ddot{u}_s + \rho_f \ddot{u}_f = E_c \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1-1)$$

- 液相の運動方程式

$$\rho^f \ddot{u}_f = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma_w}{k} w \quad (1-2)$$

- 水～土骨格連成式

$$\frac{\partial}{\partial z} (\dot{u}_s + w) = 0 \quad (1-3)$$

$u-p$ formulation

- 混合体の運動方程式

$$\rho \ddot{u}_s = E_c \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2-1)$$

- 水～土骨格連成式

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \ddot{u}_s - \dot{u}_s + \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad (2-2)$$

ここに、 ρ , ρ_s , ρ_f , ρ^f はそれぞれ混合体、固相、液相、間隙水の密度、 u_s , u_f は固相および液相の変位、 w は相対平均流速、 p は間隙水圧、 $E_c = (1-\nu)E/\{(1+\nu)(1-2\nu)\}$ は一次元圧縮剛性（ E : ヤング率、 ν : ポアソン比）、 k は透水係数、 n は間隙率、 γ_w は水の単位体積重量、上付き・は t による微分を表す。境界条件は、底面 $z = 0$ で変位固定 $u_s = 0$ かつ非排水条件 $n(u_f - u_s) = 0$ 、地表面 $z = H$ （ H : 層厚）で一定荷重 $E_c(\partial u_s / \partial z) = -q/E_c$ かつ大気圧条件 $p = 0$ とし、 $t = 0$ での初期条件として無変位の静止状態（ $u_s = u_f = 0$, $\partial u_s / \partial t = \partial u_f / \partial t = 0$ ）を与える。ここで、無次元量として、相対位置 $Z = z/H$ 、時間係数 $T = c_v t / H^2$ 、無次元変位 $U_s = u_s / \delta$, $U_f = u_f / \delta$ （ $\delta = qH/E_c$: 最終沈下量）、無次元流速 $W = n(\dot{U}_f - \dot{U}_s)$ （上付き・は T による微分）、無次元水圧 $P = p/q$ を定義すると、式(1-1)-(2-2)はそれぞれ次式でかける。

Full formulation

- 混合体の運動方程式

$$\frac{(G_s + e)e^{\infty}}{1 + G_s e} \ddot{U}_s + \frac{(1 + e)e^{\infty}}{1 + G_s e} \dot{W} = 4h^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial Z^2} - 4h^2 \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (3-1)$$

- 液相の運動方程式

$$\frac{(1 + e)e^{\infty}}{1 + G_s e} \ddot{U}_s + \frac{(1 + e)^2}{1 + G_s e} \dot{W} = -4h^2 \frac{\partial P}{\partial Z} - 4h^2 W \quad (3-2)$$

- 水～土骨格連成式

$$\dot{U}_s + W = 0 \quad (3-3)$$

$u-p$ formulation

- 混合体の運動方程式

$$\frac{G_s + e^{\infty}}{G_s - 1} \ddot{U}_s = 4h^{*2} \frac{\partial^2 U_s}{\partial Z^2} - 4h^{*2} \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (4-1)$$

- 水～土骨格連成式

$$\frac{1 + e^{\infty}}{G_s - 1} \ddot{U}_s - 4h^{*2} \dot{U}_s + 4h^{*2} \frac{\partial P}{\partial Z} = 0 \quad (4-2)$$

ここに、式(3-1)-(3-3)、式(4-1)-(4-2)を U_s のみを未知数とする偏微分方程式にまとめると

Full formulation

$$\ddot{U}_s + 4h^2 \dot{U}_s - 4h^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial X^2} = 0, \quad (5)$$

$$h = \frac{c_p H}{2c_v}, \quad c_p = \sqrt{\frac{E_c}{\rho'}}, \quad \rho' = \rho_s + \frac{\rho_f}{e^2} \quad (6)$$

u-p formulation

$$\ddot{U}_s + 4h^{\#2} \dot{U}_s - 4h^{\#2} \frac{\partial^2 U_s}{\partial X^2} = 0, \quad (7)$$

$$h^{\#} = \frac{c_p^{\#} H}{2c_v}, \quad c_p^{\#} = \sqrt{\frac{E_c}{\rho^{\#}}}, \quad \rho^{\#} = \rho_s - \frac{\rho_f}{e} \quad (8)$$

となり、Full と $u-p$ で全く同型の偏微分方程式が導かれる。式(5)、式(7)の形の偏微分方程式は「減衰波動方程式」と呼ばれ、粘性項（左辺第 2 項）が無視できるときには非減衰の波動方程式に、慣性項（左辺第 1 項）が無視できるときには静的圧密方程式にそれぞれ帰着される。式(5)と式(7)の唯一の差異は無次元パラメータ h ($h^{\#}$) にあるが、これは透水係数に反比例する無次元パラメータであり、式(6)、式(8)で与えられる。式中の $c_v = kE_c/\gamma_w$ は圧密係数、 c_p ($c_p^{\#}$) は非減衰圧縮波速度、 ρ' ($\rho^{\#}$) は圧縮波速度 c_p ($c_p^{\#}$) を与える等価一相系弾性体の密度、 $G_s = \rho^s/\rho^f$ は土粒子比重 (ρ^s : 土粒子密度)、 $e = n/(1-n)$ は間隙比である。Full と $u-p$ のパラメータの間には

$$\left(\frac{h^{\#}}{h}\right)^2 = \left(\frac{c_p^{\#}}{c_p}\right)^2 = \left(\frac{\rho^{\#}}{\rho'}\right)^{-1} = \frac{1 + G_s e}{(G_s - 1)e} \quad (9)$$

なる関係があり、最右辺の値は $G_s > 1$ 、 $e > 0$ において恒等的に 1 以上となるから、一般に無次元パラメータおよび非減衰圧縮波速度の Full $\sim u-p$ 間での大小関係は、 $h^{\#} > h$ 、 $c_p^{\#} > c_p$ となる。このことから、 $u-p$ の理論解は Full の理論解に対して低透水性寄りの解を与え（透水係数を過小評価し）、より高速に圧縮波を伝える（圧縮波速度を過大評価する）という特徴を有することがわかる。さらに、式(7)を変数分離法で解くと、無次元変位 U_s および無次元水圧 P の解が

$$U_s(Z, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{\beta_n^2} \sin(\beta_n Z) F_n^{\#}(T) \exp(-2h^{\#2} T) - Z, \quad (10)$$

$$P(Z, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{\beta_n} \cos(\beta_n Z) G_n^{\#}(T) \exp(-2h^{\#2} T), \quad (11)$$

$$F_n^{\#}(T) = \begin{cases} \cosh(2h^{\#} D_n^{\#} T) + \frac{h^{\#}}{D_n^{\#}} \sinh(2h^{\#} D_n^{\#} T) & (\beta_n < h^{\#}) \\ 1 + 2h^{\#2} T & (\beta_n = h^{\#}) \\ \cos(2h^{\#} D_n^{\#} T) + \frac{h^{\#}}{D_n^{\#}} \sin(2h^{\#} D_n^{\#} T) & (\beta_n > h^{\#}) \end{cases}, \quad \beta_n = \frac{2n-1}{2} \pi, \quad \begin{cases} D_n^{\#} = \sqrt{h^{\#2} - \beta_n^2} \\ D_n^{\#} = \sqrt{\beta_n^2 - h^{\#2}} \end{cases}, \quad (12)$$

$$G_n^{\#}(T) = \begin{cases} P_I^{\#} \cosh(2h^{\#} D_n^{\#} T) + \frac{(2 - P_I^{\#})h^{\#}}{D_n^{\#}} \sinh(2h^{\#} D_n^{\#} T) & (\beta_n < h^{\#}) \\ P_I^{\#} + 2(2 - P_I^{\#})h^{\#2} T & (\beta_n = h^{\#}) \\ P_I^{\#} \cos(2h^{\#} D_n^{\#} T) + \frac{(2 - P_I^{\#})h^{\#}}{D_n^{\#}} \sin(2h^{\#} D_n^{\#} T) & (\beta_n > h^{\#}) \end{cases} \quad (13)$$

と求まる（なお、Full の理論解は式(10)~(13)中の“ $\#$ ”を外したものに一致する）。同式より、 $u-p$ (Full) の理論解は固有関数 ($n = 1, 2, \dots$) の重ね合わせで記述され、各モードの解は $h^{\#}$ (h) の値に応じて Hyperbolic（過減衰） $\sim$ Trigonometric（減衰振動）と変化するが、いずれの固有モードも $T \rightarrow +\infty$ の極限では（透水係数によらず） $U_s \rightarrow -Z$ 、 $P \rightarrow 0$ ともにゼロに収束することがわかる。このことから、 $u-p$ 理論解の無条件収束性が確認される。

なお、解析初期の時刻における無次元水圧 $P(Z, T \rightarrow +0) = P_I^{\#}$ (P_I) は、 $T = 0$ における瞬間載荷時の境界値問題（非排水条件という幾何拘束の下での慣性力と外荷重のつり合い）の解として求まるものであるが、その値は以下のように Full と $u-p$ でそれぞれ異なる値が導かれる。

Full formulation

$$P_I = \frac{1+e}{1+G_s e} \Rightarrow 0 < P_I < 1 \quad (G_s > 1, e > 0) \quad (14)$$

u-p formulation

$$P_I^{\#} = -\frac{1+e}{G_s - 1} \Rightarrow P_I^{\#} < 0 \quad (G_s > 1, e > 0) \quad (15)$$

地盤への瞬間載荷問題における解析初期段階において、静的解析では、外荷重はすべて（過剰）間隙水圧として分担されるため $P_I = 1$ となるが、Full では土骨格および間隙水の慣性力も力のつり合いに寄与するため $P_I < 1$ となる³⁾。これに対し、 $u-p$ では $P_I^{\#} < 0$ となり、負の水圧が解かれることとなるが、このような瞬間載荷により圧縮全応力を与えているにもかかわらず水圧が減少するような「物理的に不合理な現象」は、透水係数が大きい条件下での $u-p$ 計算においてはしばしば見られる現象である。本稿で導いた $u-p$ の理論解が負の過剰水圧の発生を説明していることから、負の水圧の発生自体は（Full の理論解とは乖離するものの） $u-p$ の方程式系が本質的に有する解の性質であるといえよう。

3. おわりに

$u-p$ の理論解の無条件収束性を示した。 $u-p$ の不安定性はあくまで数値解析的なものとして区別して理解すべきである。
謝辞 本研究は、科学研究費補助金（若手研究：課題番号 22K14324）の補助を受けて実施した。

参考文献

- 1) Noda, T. and Toyoda, T. (2019): Development and verification of a soil–water coupled finite deformation analysis..., *S&F*, **59**(4), 888-904.
- 2) Toyoda, T. and Noda, T. (2021): Numerical simulation based heuristic investigation of inertia-induced phenomena..., *S&F*, **61**(2), 352-370.
- 3) 豊田, 野田 (2022): スペクトル半径を用いた水～土連成計算の数値安定性の評価..., 第 66 回理論応用力学講演会, OS4-4-04.