

分岐理論に基づく剛性の異なる堆積構造に起因した座屈褶曲の波長決定メカニズムの解明

座屈褶曲 分岐 有限変形解析

名古屋大学 国際会員 ○野田 利弘, 豊田 智大
東京電力 非会員 大西 和也

1. はじめに

水平圧縮作用下にある地盤に生じる典型的な地形変状として、図 1 のように地層が波打つように変形する「座屈褶曲」が知られている。本研究では、「座屈褶曲の波長が何で決まるのか」という問いに対し、有限変形理論に基づく増分型解析における接線剛性マトリックスの固有値変化に着目し、分岐理論の観点から解を与えることを試みた。

座屈現象の中で最も基本的なものは「Euler 座屈」であるが、Euler 座屈では座屈褶曲の波長を説明することが決してできない。Euler 座屈では、最低次のモードが最初にゼロ固有値を達成するが、その座屈長は部材長に依存し、部材長が 2 倍になれば座屈長も 2 倍になる。これに対し、水平方向に半無限に広がる地盤において生じる座屈褶曲の波長は、地盤の物性や層厚のみによって決まり、部材長には依拠しないと考えられている。

ところで、機械・材料工学分野においては、樹脂などの弾性基板上に接合された film に発生する図 2 のような「しわ」が、座屈褶曲と同様、物性のみに依拠し部材長非依存の波長を呈することが知られており、弾性床上の梁理論（Winkler モデル）による説明がなされている³⁾。本稿では、この「しわ」との類推から、座屈褶曲が剛性の異なる堆積構造に起因して生じると考え、地盤の有限変形に伴う系の固有値変化を調べた。一連の変形解析・固有値解析の結果から、座屈褶曲の発生は高次モードが低次モードに先行してゼロ固有値を達成した帰結として説明可能であり、その発生波長が地盤の物性や層厚のみで決まる（部材長によらない）ことを示す。



図 1 座屈褶曲の例¹⁾
(鳥海山・飛鳥ジオパーク)

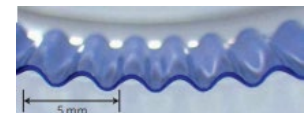


図 2 film に生じるしわ²⁾

2. 解析手法

変形解析には名古屋大学地盤力学研究グループが開発した地盤の変形解析コード **GEOASIA** を用いる。本手法は増分型のつり合い式（厳密には、慣性力を考慮した速度型の運動方程式）を解き、step 毎に Updated Lagrange 法に基づいて座標等の状態更新を行う有限変形解析手法であり、領域の幾何形状の変化に起因して生じる移流項を剛性方程式中に考慮するとともに、step 毎に応力の収束計算を行う陰解法を採用している。本研究では、この変形解析に加え、step 毎に変化してゆく系の接線剛性マトリックスに対して固有値解析を実施することにより、変形に伴い連続的に変化する様子を詳細に調べた。

3. 解析条件

解析に用いる有限要素メッシュを図 3 に示す。同図の Case 1, Case 2 は、いずれも領域両端に水平変位速度を与える一様圧縮解析であるが、Case 1 は film のみ、Case 2 はこの film が弾性基板上に接合された系を対象としており、それぞれ Euler 座屈、弾性基板上のしわ（座屈褶曲）を生じる境界条件を想定している。いずれも平面ひずみ条件であり、物体の自重は考慮しない。

本稿では、幾何非線形由来の不安定化に着目するため、構成材料は film、弾性基板ともに線形弾性体（亜弾性 Hooke 則）とし、客観応力速度に Green-Naghdi rate を用いる。Young 率は film で $E_p = 0.57 \times 10^6$ kN/m²、弾性基板で $E_s = 0.57 \times 10^2$ kN/m² とした。Poisson 比は film と弾性基板ともに $\nu = 0.30$ とした。また、間隙水の存在を考慮しない一相系解析とした。

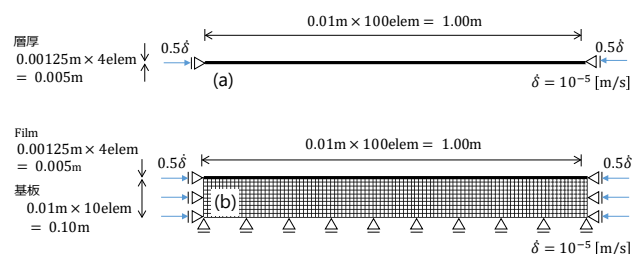


図 3 有限要素メッシュおよび境界条件 ((a) Case 1, (b) Case 2)

4. 解析結果

Case 1, Case 2 の一様変形中の各固有モードの固有値の変化を図4, 図5に示す。

まず, Case 1 では, 各モードの固有値が図4のように次第に減少し, 低次のモードから順にゼロ固有値(分岐点)を経験する。つまり, メッシュに少しでも歪みがある場合(幾何学的初期不整を与える不完全系の解析)では, 波長が最も長い1次モード(赤色)が出現することとなる。この結果は, 一般的な梁の Euler 座屈における基本モードの出現と一致する。

一方, 弾性基板をした Case 2 では, 図5のように, 解析初期の4次モード(水色)が1~3次のモード(赤色, 橙色, 緑色)を追い抜き, 最初にゼロ固有値を達成する。このような固有値の順序逆転により, 弾性基板上に接合された film においては, 幾何不整の存在下で高次の「しわ」が出現することとなる。なお, このような固有値の逆転現象は, 増分型有限変形解析により固有値変化を連続的に追跡したからこそ初めて観察できることを強調しておく。

さらに, Case 2 において地盤の水平方向の全長を2倍にした場合の連続固有値解析の結果を図6に示す。同解析において最初にゼロ固有値を達成する6次モード(赤色)の波長は, 先の Case 2 の4次モードの波長と一致することから, 弾性基板上の film において発生するしわの部材長非依存性が確認できる。また, 紙幅の都合上省略するが, 本解析において層厚と剛性を系統的に変えた際の最低次モードの波長の変化は, Winkler モデル³⁾において, 弾性床の梁の水平方向の連続性と弾性床の変形の鉛直一次元性を仮定して導出される最低次モードの波長 λ の理論解

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4\pi^4}{3} E_p^{1/4} E_c^{-1/4} h^{3/4} H^{1/4}},$$

$$E_c = \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

と一致することを確認している。ここに, h , H はそれぞれ film, 基盤の層厚である。

5. おわりに

本稿では, 増分型変形解析における接線剛性マトリクスの固有値変化を連続的に捉える計算を通して, 部材長非依存の座屈褶曲の発生が, 弾性基板上に接合された film において生じる「しわ」との類推から, 高次モードが低次モードよりも先にゼロ固有値を達成した帰結として説明されうること示した。今後は, 多重の互層地盤に対して同様の解析を実施するとともに, 地盤の弾塑性の影響(材料不安定が分岐現象に与える影響)などについても検討したい。

謝辞 本研究は, 科学研究費補助金(基盤研究(B): 課題番号 22H01586)の補助を受けて実施した。

参考文献)

- 1) 板垣直俊 (2018): 鳥海山・飛鳥ジオパーク, <https://chokaitobishima.com/column/n-itagaki.html>, 2023.1.20 閲覧。
- 2) Brau, F. et al. (2011): Multiple-length-scale elastic instability mimics parametric resonance..., *Nature physics*, Vol. 7, pp. 56-60.
- 3) 池田清宏, 室田一雄 (2001): 構造系の座屈と分岐, コロナ社, pp. 58-59.

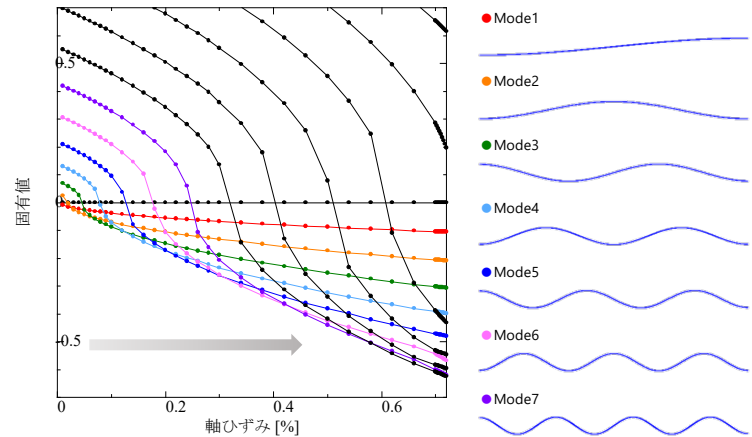


図4 各固有モードの固有値変化 (Case 1)

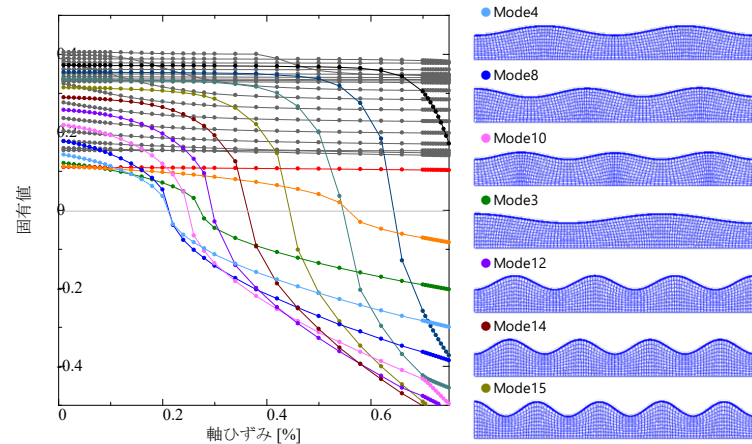


図5 各固有モードの固有値変化 (Case 2)

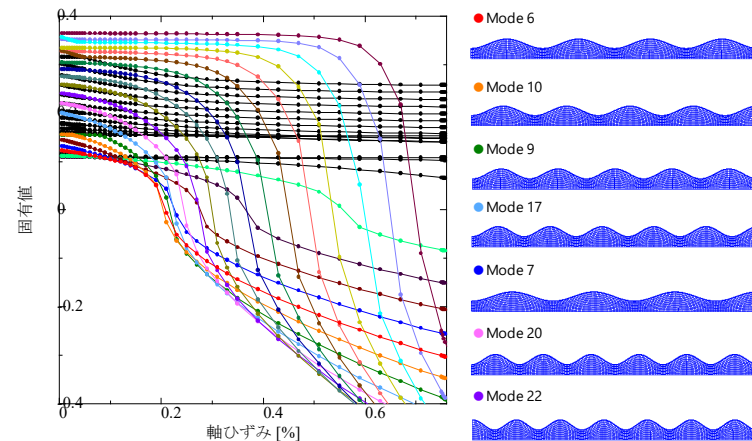


図6 各固有モードの固有値変化 (Case 2 の全長を2倍にした解析)