

弾性地盤の有限変形に伴う接線剛性マトリクス の固有値変化に着目した座屈褶曲の波長決定因子の解明

Elucidation of Wavelength Determinants of Buckling Folds
Focusing on Eigenvalue Changes of Tangential Stiffness Matrix
during Finite Deformation of Elastic Ground

豊田智大¹⁾ 野田利弘²⁾ 大西和也³⁾
Tomohiro Toyoda, Toshihiro Noda and Kazuya Onishi

¹⁾博(工)名古屋大学大学院 土木工学専攻 助教 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: toyoda@civil.nagoya-u.ac.jp)

²⁾博(工)名古屋大学大学院 土木工学専攻 教授 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: noda@civil.nagoya-u.ac.jp)

³⁾修(工)東京電力

The wavelength determinants of buckling folds in elastic soils are discussed focusing on the eigenvalue variation of the tangential stiffness matrix during finite deformation of the soil. While the lower-order mode occurs preferentially in Eulerian buckling, the higher-order modes are often exhibited in buckling folds and their wavelengths are determined by physical properties and stratal composition, independent of the size of the ground. In this paper, we show that the occurrence of such higher-order modes can be explained by (1) the presence of a substrate layer, (2) application of the ultrahigh confining pressure, and (3) fixed bottom displacement.

Key Words : Buckling Fold, Bifurcation, Eigenvalue, Finite Deformation

1. はじめに

水平圧縮を受ける地盤において生じる地形変動のうち、**図-1**のように地層が波打つように変形する「座屈褶曲」は最も典型的な地形のひとつである。本稿では、この「座屈褶曲」の発生波長が何で決まるかという問いに対し、地盤の有限変形に伴う増分型剛性方程式の接線剛性マトリクスの変化に着目し、分岐理論の観点から解を与えることを目指す。

座屈現象の中でも最も基本的なものは梁の「Euler 座屈」であるが、Euler 座屈の理論によっては、この座屈褶曲の波長を説明することはできない。Euler 座屈では、最初にゼロ固有値を達成する 1 次モードが優先的に発現するが、その座屈長は部材長に依存し、部材長が 2 倍になれば座屈長も 2 倍になる。しかし、水平方向に無限に連なる地盤の「部材長」は無窮大（あるいは解析者が便宜的に設定するもの）であるから、座屈褶曲の波長はこの「部材長」に依らず、層厚や物性等の情報のみによって決まると考えられる。

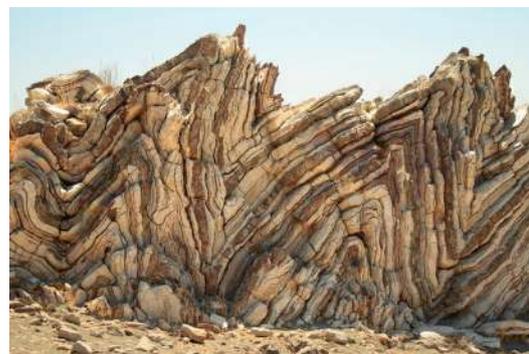
本稿では、弾性地盤における部材長非依存の高次の座屈褶曲の発現メカニズムについて、

- A) 剛性の異なる堆積構造の存在
- B) 超高拘束圧の影響
- C) 底部基盤層の存在

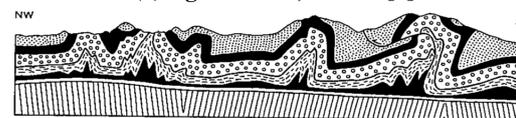
により説明されうることを、一連の有限変形解析および連続固有値解析を通して示す。

2. 定式化および解析手法

本章では、本稿で扱う支配方程式および有限変形解析・固有値解析の手法を示す。



(a) Agios Pavlos, Greece [1]



(b) ジュラ山脈のデコルマ面上位の地層の褶曲 [2]

図-1 座屈褶曲の例

(1) 支配方程式

単一材料の固相からなる連続体の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (1)$$

ここに、 ρ は密度、 \mathbf{v} は速度ベクトル、 \mathbf{T} は Cauchy の応力テンソル（引張を正）、 \mathbf{b} は単位質量あたりの物体力ベクトル（一定）である。Updated Lagrange 法に基づ

く速度型の変形解析においては、式(1)の体積積分の物質時間微分をとることで得られる、次の「速度型」の運動方程式を解くこととなる。

$$\rho \dot{v} = \text{div} \dot{S}_t \quad (2)$$

ここに、 \dot{S}_t は次式で定義される公称応力速度テンソルで、表記は Yatomi et al.[3] にしたがう。

$$\dot{S}_t = \dot{T} + (\text{tr}D)T - TL^T \quad (3)$$

ここでは、客観応力速度 (Cauchy 応力の Jaumann rate) および構成式 (歪弾性 Hooke 則) を次式で与える。

$$\dot{T} = \dot{T} + TW - WT \quad (4)$$

$$\dot{T} = \mathcal{L}[D] \quad (5)$$

ここに、 L は速度勾配テンソル、 D はストレッチングテンソル、 W はスピテンソル、 \mathcal{L} は線形作用素、 τ は転置作用素である。式(2)に式(3)~(5)を代入すると

$$\rho \dot{v} = \text{div} \left\{ \mathcal{L}[D] + (\text{tr}D)T - TL^T - (TW - WT) \right\} \quad (6)$$

となる。式(6)右辺の第2~3項 $(\text{tr}D)T - TL^T$ は、領域の幾何形状の変化に起因して生じる「移流項」、第4項 $(TW - WT)$ は客観応力速度に含まれるスピンに由来する項である。

(2) 有限変形解析

有限変形解析では、式(6)を時空間離散化し与えられた初期条件・境界条件のもとで解くこととなる。空間離散化は有限要素法 (Isoparametric 要素) により行う。式(6)の弱形式は、仮想変位速度ベクトルを δv として、

$$\begin{aligned} & \int_V \rho \dot{v} \cdot \delta v dv + \int_V \mathcal{L}[D] \cdot \delta D dv \\ & + \int_V \left\{ (\text{tr}D)T - TL^T \right\} \cdot \delta L dv + \int_V (TW - WT) \cdot \delta D dv \\ & = \int_a \dot{s}_t \cdot \delta v da \end{aligned} \quad (7)$$

とかける。ここに、 $\dot{s}_t = \dot{S}_t n = \dot{t} + \{(\text{tr}D) - n \cdot Dn\} t$ は公称表面力速度である。 δv の任意性を考慮しつつ展開すると、解くべき常微分方程式として

$$M \{\dot{v}\} + K \{v\} = \{f\} \quad (8)$$

が得られる。ここに、 M は質量マトリクス、 K は接線剛性マトリクス、 $\{\dot{v}\}$ 、 $\{v\}$ および $\{f\}$ は、節点ごとの加速度 (躍度)、速度および等価節点力速度からなる列ベクトルである。さらに、接線剛性マトリクス K の具体形は

$$K = K_E + K_G + K_W \quad (9)$$

と書かれ、 K_E は材料の「弾性」に起因する剛性マトリクス (正定値対称)、 K_G は有限変形場での応力の「移流項」に起因する剛性マトリクス (非対称、いわゆる幾何剛性マトリクス [4])、 K_W は「スピン」に起因す

る剛性マトリクス (対称) であり、それぞれ式(7)の左辺第2項、第3項、第4項に由来する。ただし、有限変形場での「高次項」としての意味をもつ K_G 、 K_W のみならず、材料弾性由来の K_E もまた、現配置において定義される形状関数から求まる B マトリクス $[B]$ を用いて、

$$K_E = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (10)$$

と書かれ、その要素の形状は刻々と変化するから、その成分の値は一定とはならない点に注意されたい。なお、 $[D]$ は対象要素の弾性係数マトリクスである。

有限変形解析においては、式(8)をさらに Wilson- θ 法により躍度の線形性を仮定しつつ時間離散化し、Updated Lagrange 法によりステップ毎に次刻の状態を iterative に予測・更新してゆくこととなるが、時間離散化された方程式の具体形は紙幅の都合上割愛する。解析手法の詳細は Noda et al.[5] を参照されたい。

(3) 連続固有値解析

本稿では、系の固有値変化に着目するため、前節の有限変形解析における iteration 収束後の状態をもとに作成した接線剛性マトリクス K について、固有値解析を step 毎に行い、各固有モードの固有値がどのように時間変化するか調べた。

具体的な計算方法は、以下のとおりである。ある時刻において固有値解析を行うと、系の未知自由度数 (N 個とする) と同じ数の固有モード (固有値と固有ベクトル) が求まるが、その固有値および固有ベクトルの値は、有限変形に伴う接線剛性マトリクスの成分の変化に伴い時々刻々と変化してゆく。したがって、各モードの固有値変化を捉えるためには、step 前後のそれぞれの時刻における固有値解析の結果を比較・照合し、変形前後で同一とみなせる固有モードの組を都度特定する必要がある。ここでは、step 更新前の時刻 (時刻 $t = t$) における正規化された固有ベクトル p_i ($i = 1 \sim N$) と step 更新後の時刻 (時刻 $t = t + \Delta t$) における正規化された固有ベクトル q_j ($j = 1 \sim N$) の類似度を「cos 類似度」(更新後の固有ベクトルの更新前の固有ベクトルに対する方向余弦) として

$$\cos \theta_{ij} = p_i \cdot q_j \quad (11)$$

と定義し、その絶対値が最も 1 に近い組合せが変形前後で同一の固有モードであると判定した。また、固有値解析には intel の数値演算ライブラリより汎用非対称固有値ソルバ (dggev) を使用した。

なお、ここでの有限変形解析は慣性力を考慮した動的解析であり、常微分方程式(8)を時間離散化して得られる「解くべき連立方程式」の係数マトリクスは質量マトリクス M と接線剛性マトリクス K を重ね合わせた形をとる。一方、ここでの固有値解析は、慣性由来のみかけの剛性ではなく、系が本質的に有する剛性を評価するため、固有値解析は接線剛性マトリクス K そのものの固有値を求める計算を指し、時間離散化して得られた連立方程式の係数マトリクスの固有値でも、慣性項を考慮した一般固有値問題の固有値でもない点を

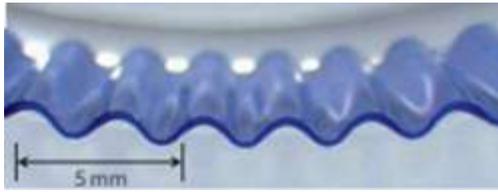
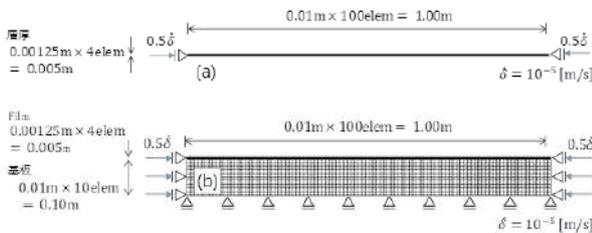


図-2 Film 表面にみられる「しわ」

図-3 有限要素メッシュおよび境界条件
(a) Case 1, (b) Case 2

補足しておく。また、境界上での既知表面力の移流についても、同様の理由から、ここでは剛性マトリクスに含めないこととした。

3. 剛性の異なる堆積構造の影響

機械・材料工学分野においては、樹脂などの弾性基板 (substrate) に接合された膜 (film) に発生する図-2 のような「しわ」の発生波長が、部材長に依拠せず物性のみによって決まる性質を有することが知られており、古典的には弾性床上の梁理論 (Winkler モデル) [4] による説明がなされている。そこで本章では、この film の「しわ」との類推から、座屈褶曲の発生波長の決定因子を剛性の異なる堆積構造に求め、水平一様圧縮過程での固有値変化を求めた。

(1) 解析条件

図-3 のような 2 種類の二次元平面ひずみ有限要素メッシュを用意し、左右両端に水平変位速度を与えたときの一様圧縮変形とその過程での各モードの固有値変化を求める。Case 1 は film のみの圧縮変形を解くものであり、Euler 座屈を生じる境界条件である。一方、Case 2 はこの film が相対的に剛性の小さい substrate に接合された複合系の圧縮変形を解くものであり、地表面においてしわ (座屈褶曲) を生じる境界条件である。さらに、Case 2 の水平方向のモデル長を 2 倍とした Case 3 についても同様の解析を実施した。材料定数はそれぞれ表-1 のとおり設定した。

表-1 材料定数

	Film	Substrate
Young 率 E (kN/m ²)	0.57×10^6	0.57×10^2
Poisson 比 ν	0.30	0.30

(2) 解析結果

Case 1, Case 2 について、完全系 (一様変形) における各固有モードの固有値変化を図-4, 図-5 にそれぞれ示す。

まず、Case 1 では、各モードの固有値が図-4 のように次第に減少し、低次のモードから順にゼロ固有値 (分岐点) を経験する。つまり、メッシュに少しでも歪みがある場合 (幾何学的初期不整を与える不完全系の解析) では、低次のモード (波長が長いモード) が優先的に発現することとなる。この結果は、一般的な梁における Euler 座屈の理論と一致する。

これに対し、substrate の存在を考慮をした Case 2 では、図-5 のように、解析初期の高次モード (● Mode 4) が低次のモード (● Mode 1, ● Mode 2, ● Mode 3) を追い抜き、最初にゼロ固有値を達成する。このような固有モードの順序逆転により、substrate に接合された film においては、幾何不整の存在下で高次の「しわ」が出現することとなる。なお、このような固有値の逆転は、増分型の有限変形解析により固有値変化を連続的に追跡したからこそ初めて観察できるものである。

次に、Case 2 において地盤の水平方向の全長を 2 倍にした場合 (Case 3) について、同様の連続固有値解析を行った結果を図-6 に示す。同解析において最初にゼロ固有値を達成する ● Mode 6 の波長は、先の Case 2 の ● Mode 4 の波長と一致することから、substrate 上の film において発生するしわの部材長非依存性が確認できる。また、紙幅の都合上省略するが、本解析において層厚と剛性を系統的に変えた際の最低次モードの波長の変化は、Winkler モデル [4] において、弾性床の梁の水平方向の連続性と弾性床の変形の鉛直一次元性を仮定して導出される最低次モードの波長 λ の理論解

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4\pi^4}{3} E_p^{1/4} E_c^{-1/4} h^{3/4} H^{1/4}} \quad (12)$$

$$E_c = \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (13)$$

と一致することを確認している。ここに、 E_p , E_s はそれぞれ film および substrate の Young 率、 h , H はそれぞれ film および substrate の層厚である。

4. 超高拘束圧作用下での高次モードの発現

本章では、プレート沈み込み帯における地層のように、対象領域が高拘束圧作用下にある場合を考える。このような環境下においては、領域の幾何形状変化により生じる「移流項」の存在に起因して、たとえ剛性が一様であったとしても、高次モードの座屈褶曲が発現しうることを解析的に示す。

(1) 解析条件

ここでは、地盤中の単一の地層 (コンピテント層) に着目し、図-7 のような一様材料からなる矩形領域の水平圧縮を解く。ただし、初期応力として地盤全体に一様な等方圧を表-2 のとおり 2 種類与えた (Case 4, Case 5)。一様弾性体の材料定数は 3 章の film と同一とした。

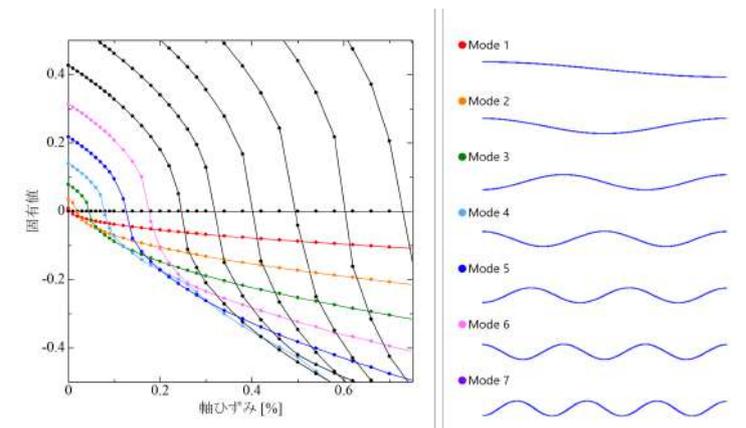


図-4 各固有モードの固有値変化 (Case 1 : film のみ)

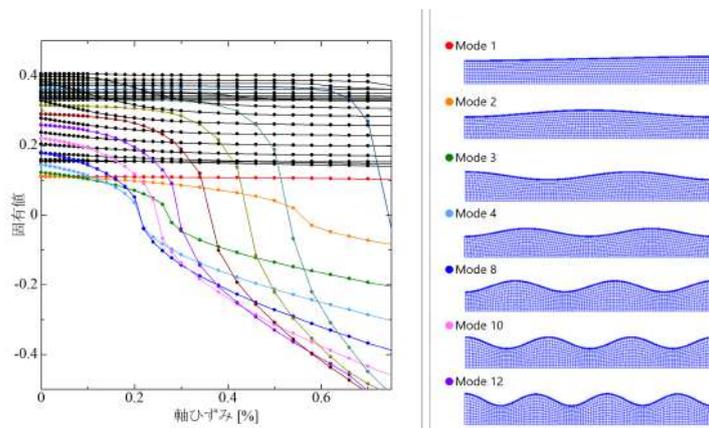


図-5 各固有モードの固有値変化 (Case 2 : film+substrate)

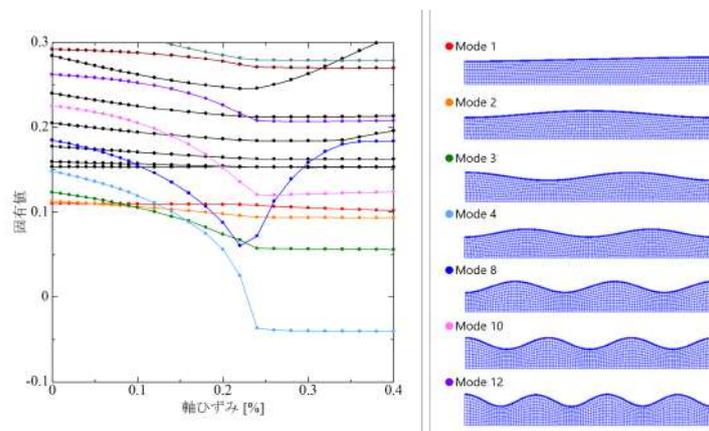


図-6 各固有モードの固有値変化 (Case 3 : Case 2 の模型全長を 2 倍にした解析)



図-7 有限要素メッシュおよび境界条件 (Case 4, Case 5)

表-2 解析条件

	初期等方圧 (kPa)
Case 4	0
Case 5	2×10^4

(2) 解析結果

Case 4, Case 5 について, 一様変形中の固有値変化を図-8, 図-9 にそれぞれ示す。

Case 4 では, 前節の Case 1 と同様, 解析初期 (軸ひずみ 0%) における固有値は (恒等的にゼロ固有値をとる剛体変位モードを除き) いずれのモードに対しても正值となるが, 変形に伴い, 低次モード (● Mode 1) から順にゼロ固有値を達成してゆく (Euler 座屈)。

これに対し, 初期超高等方圧を与えた Case 5 では, 低次モード (● Mode 1 ~ ● Mode 5) は解析初期から負固有値をとり, その後の圧縮過程でも正值に転じないことが確認される。これにより, 初めてゼロ固有値を経験し分岐を生じるのは高次モード (● Mode 6) となる。本稿では紙幅の都合上割愛するが, Case 5 において, 幾何学的初期不整としてホワイトノイズを与えた不完全系の解析を実施すると, 確かに Mode 6 の波長の褶曲が発現することを確認している。

このような解析初期の無変形状態における低次モードの固有値の負値化は, 「移流項」(式 (3) 中の $(\text{tr}D)T-TL^T$) の存在に由来する。すなわち, この移流項は, 無応力状態 ($T=O$) では $K_G=[O]$ となり接線剛性マトリクス K に対し一切寄与しないが, 無変形状態であっても, 応力テンソル T の成分が非零であれば K の成分および固有値の値に影響することによる。

なお, 前章~本章の解析において, 幾何剛性行列 K_G を外して K の固有値解析を行うと, 座標の変化に伴い弾性剛性マトリクス K_E の値は僅かに変化するものの, すべての固有モードの固有値は正のまま推移する。このことは, 座標は更新するが移流項を考慮しない不完全な有限変形解析においては, 移流項由来の不安定化現象を見落とす可能性があることを示唆している (移流項の重要性)。一方, スピン由来の剛性マトリクス K_W については, 軸ひずみ 20~30%前後までの範囲では, その考慮の有無に応じて固有値の推移に明確な差異が生じることは無かった。これは, 本稿の解析対象がスピンを生じない一様変形解析であることによると考えられるが, 軸ひずみ 50%を超える超大変形解析においては, この影響も明確に現れることとなる。これについては次章で触れる。

5. 基盤固定の影響

水平圧縮作用下にある地盤においては, ときに大規模な平行変位を有するすべり帯 (デコルマ) が形成され, その上盤側では, 衝上断層群 (imbrication) のほか, 図-1(b) のような大規模な褶曲の形成がしばしば認められる。ここでは, デコルマ上盤側の領域において発達する座屈褶曲について, デコルマ面での「鉛直変位の拘束」の下であれば (上述の堆積構造および等方拘束圧を考慮せずとも) 高次モードの波長の発現が説明できることを示す。

(1) 解析条件

新たに Case 6 として, Case 4 の有限要素メッシュ図-7 の底面鉛直変位を固定したうえで, 領域の一様水平圧縮を解く解析を実施した。その他の材料定数および初

期条件は Case 4 に準拠した。同解析は, 模型底面 (デコルマ面) を上下対称軸と見做せば, Euler 座屈の問題において図心軸の面外方向変位を生じる固有モードの発現を拘束した解析と等価である。

(2) 解析結果

Case 6 の固有値解析結果を図-10 に示す。同図より, 底面鉛直変位を拘束したことで, 2~3 章までで解かれたような図心軸の面外変位を生じるモードのかわりに, 地表面に高次の起伏を生じるモード (● Mode 4~, デコルマ面を対称軸とみなしたときの上下対称モード) が軸ひずみ $\varepsilon_a = 42%$ を超える大圧縮ののちに, 一斉にゼロ固有値を経験することが確認される。この事実から, 大変形後の高次モードの発現が基盤鉛直変位拘束の効果として説明されうることが理解できる。

ただし, 高次対称モード群の各モードがゼロ固有値をほぼ一斉に経験することは, これらのモードの分岐点が互いに近接して存在することを意味する。このため, 変形計算実行時の step 毎の時間刻み幅の設定やゼロ固有値に至るまでの数値誤差の累積状況によっても, どの高次モードの変形が卓越するかは大きく変化しうるため, 実際に発現するモードの特定は困難である点に注意を要する。

ところで, 2~3 章での一連の解析においては, 接線剛性マトリクス K に占めるスピン由来項 K_W の影響はごく限定的であったが, 本章の解析においては, K_W の項を除外した上で K の固有値解析を行うと, 全てのモードの固有値が正值のまま推移することとなり, 座屈褶曲の発現を説明できない。換言すれば, 本章のメカニズムにより座屈褶曲を説明する場合には, スピン項の考慮は必須であると言える。なお, この事実は, 亜弾性構成式において採用する客観応力速度によっても分岐点位置が変化しうることを意味するが, その具体的影響については今後検討する。

6. おわりに

本稿では, updated Lagrange 法に基づく増分型変形解析における接線剛性マトリクスの各固有モードの固有値変化を連続的に追跡する解析手法により, 座屈褶曲における高次モードの発現が A) 剛性の異なる堆積構造, B) 超高等方拘束圧の作用, C) 底部基盤層の存在の影響として説明されうることを示した。

今後は, 衝上断層群 (imbrication) や Riedel せん断帯をはじめとする種々の断層変位地形の発生形態の本質的理解に向けて, 地盤の材料非線形性 (弾塑性), とくに脆性材料の軟化現象に由来する不安定化 (負固有値の実現) についても検討する。

謝辞: 本研究は, 科学研究費補助金 (基盤研究 (B)): 課題番号 22H01586) の補助を受けて実施した。

参考文献

- [1] Geology In: Agios Pavlos, <https://www.geologyin.com/2014/06/amazing-folding-rocks-at-agia-pavlos.html>, 2023.4.6 閲覧。

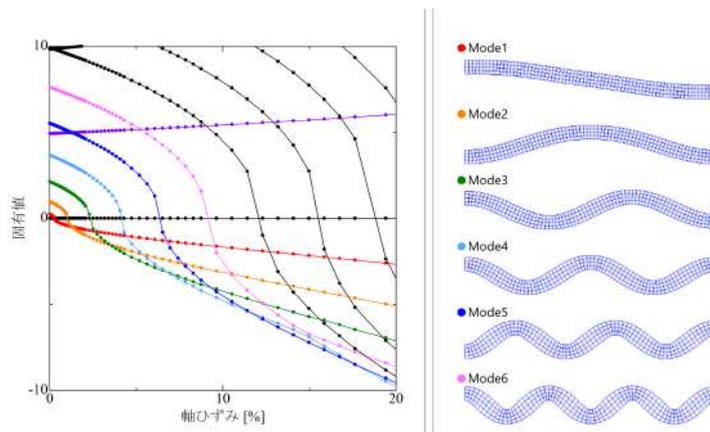


図-8 各固有モードの固有値変化 (Case 4: 等方拘束圧 0 kPa)

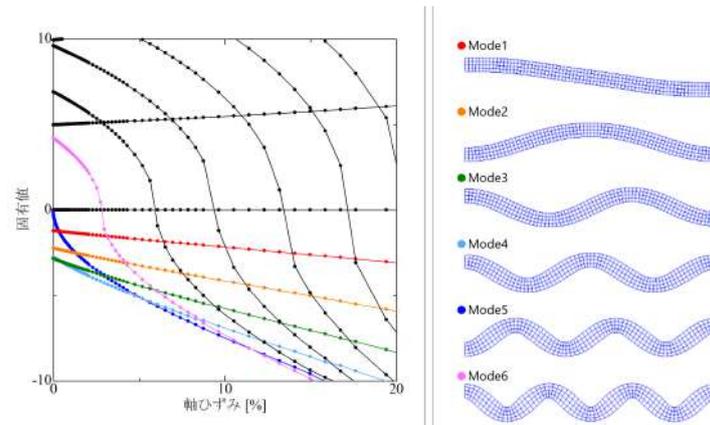


図-9 各固有モードの固有値変化 (Case 5: 等方拘束圧 2×10^4 kPa)

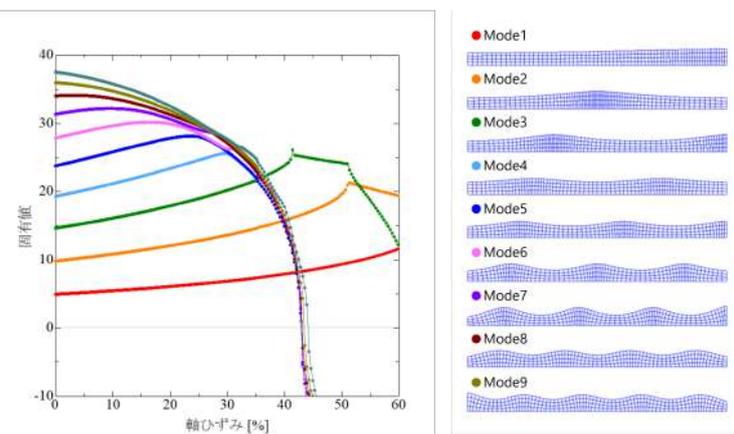


図-10 各固有モードの固有値変化 (Case 6: Case 4 において底面鉛直変位を固定した解析)

- [2] 狩野謙一, 村田明広: 構造地質学, 朝倉書店, pp.129-137, 1998.
- [3] Yatomi, C. et al.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils Found.*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- [4] 池田清宏, 室田一雄: 構造系の座屈と分岐, コロナ社, pp.74-89, 2001.
- [5] Noda, T. et al.: Soil-water coupled finite deformation

analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, *Soils Found.*, Vol.48, No.6, pp.771-790, 2008.