スペクトル半径を用いた水～土連成計算の数値安定性の評価
～ u-p 計算不能域の抽出と u-w-p 計算の有効性検証 ～
Evaluation of Numerical Stability of Soil-Water Coupled Calculations Using Spectral Radius
~ Extraction of Impossible Region of u-p Calculation and Validation of u-w-p Calculation ~

豊田　智大（名大・工）　　野田　利弘（名大・工）
Tomohiro TOYODA, Nagoya University
Toshihiro NODA, Nagoya University
FAX: 052-789-3836, E-mail: toyoda@civil.nagoya-u.ac.jp

Numerical stability of soil-water coupling systems was evaluated by a spectral radius of simultaneous recursive equations comprised of ***u**-p*/***u**-**w**-p* governing equations with time integration formulas. The numerical stability of ***u**-**w**-p* formulation was ensured even at inapplicable range of ***u**-p* formulation. A possibility estimation of ***u**-p* calculation based on "$\gamma_{\theta 1}$ criterion" was mostly valid except highly-permeable/ incompressible regions. A spectral radius less than 1 did not ensure concordance of ***u**-p* and ***u**-**w**-p* solutions.

１．はじめに

混合体理論に基づく飽和地盤の水～土連成解析の多くは，混合体の運動方程式に質量保存則より導かれる水～土骨格連成式を連立して解く ***u**-p* formulation（以下，単に ***u**-p* と記す）により定式化されている．同手法は，間隙水の浸透が十分静的に生じることを仮定する定式化であり，間隙水が動的にも浸透しうる高透水性土に対しては計算が破綻することが知られている．そこで著者らは，静的浸透の仮定を導入することなく，間隙水の動的浸透を考慮した ***u**-**w**-p* formulation（以下，単に ***u**-**w**-p* と記す）に基づく解析手法を開発するとともに，同手法により，間隙水の慣性・相対移流に起因した特徴的な現象が解かれることを示してきた[1), 2)]．本稿では，離散化した ***u**-p* および ***u**-**w**-p* の支配方程式より連立漸化式を構築し，その安定性をマトリクスのスペクトル半径を用いて評価した．特に，***u**-**w**-p* により水～土連成計算の実行可能域の拡大（***u**-p* 適用限界の克服）が可能であることを示すとともに，従来より ***u**-p* 適用不能域として用いられてきた $\gamma_{\theta 1}$ 基準[3)]の例外についても指摘する．

２．水～土連成問題の支配方程式と連立漸化式

***u**-**w**-p* の支配方程式[1)]を以下に示す．

<u>飽和土の運動方程式（速度型）</u>

$$\rho_s \mathrm{D}_s^2 \boldsymbol{v}_s + \rho_f \mathrm{D}_s \mathrm{D}_f \boldsymbol{v}_f + \rho^f (\operatorname{div} \boldsymbol{v}_s)(\mathrm{D}_s \boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{b}) = \operatorname{div}(\mathrm{D}_s \boldsymbol{S}_t) \tag{1-a}$$

<u>間隙水の運動方程式</u>

$$\rho^f \mathrm{D}_f \boldsymbol{v}_f = -\gamma_w \operatorname{grad} h - \frac{\gamma_w}{k} \boldsymbol{w} \tag{1-b}$$

<u>水～土骨格連成式</u>

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_s + \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \tag{1-c}$$

ここに，ρ，ρ_s，ρ_f，ρ^fは混合体，固相，液相，間隙水の密度，D_s，D_fは固相，液相に着目した物質時間微分，$\boldsymbol{v}_s$，$\boldsymbol{v}_f$は固相，液相の速度，$\boldsymbol{w} = n(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s)$は間隙水の相対平均流速，$\boldsymbol{b}$は物体力，$\mathrm{D}_s\boldsymbol{S}_t$は公称応力速度，$h = z + p/\gamma_w$は全水頭，$p$は間隙水圧，$z$は位置水頭，$n$は間隙率，$k$は透水係数，$\gamma_w$は水の単位体積重量である．一方，***u**-p* の支配方程式は，浸透加速度（間隙水の土骨格に対する相対加速度）が土骨格の加速度に対して十分に小さい（$\mathrm{D}_f \boldsymbol{v}_f - \mathrm{D}_s \boldsymbol{v}_s \ll \mathrm{D}_s \boldsymbol{v}_s$）ことを仮定して式(1)を縮約することにより得られる[3)]．

<u>飽和土の運動方程式（速度型）</u>

$$\rho \mathrm{D}_s^2 \boldsymbol{v}_s + \rho^f (\operatorname{div} \boldsymbol{v}_s)(\mathrm{D}_s \boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{b}) = \operatorname{div}(\mathrm{D}_s \boldsymbol{S}_t) \tag{2-a}$$

<u>水～土骨格連成式</u>

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \operatorname{div}(\mathrm{D}_s \boldsymbol{v}_s) - \operatorname{div} \boldsymbol{v}_s + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} h) = 0 \tag{2-b}$$

本稿では最も単純な条件として，自重および真物質の圧縮性を無視し，一次元微小変形弾性体について検討する．この場合，式(1)および(2)は以下のように書き換えられる．

<u>***u**-**w**-p*</u>

$$\rho_s \ddot{u}_s + \rho_f \ddot{u}_f = E_c \frac{\partial^2 \dot{u}_s}{\partial x^2} - \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} \tag{3-a}$$

$$\rho^f \dot{u}_f = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\gamma_w}{k} w \tag{3-b}$$

$$\frac{\partial \dot{u}_s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3-c}$$

<u>***u**-p*</u>

$$\rho \ddot{u}_s = E_c \frac{\partial^2 \dot{u}_s}{\partial x^2} - \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} \tag{4-a}$$

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \frac{\partial \ddot{u}_s}{\partial x} - \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial x} + \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \tag{4-b}$$

ただし，$x = \{x | 0 < x < H\}$は座標，$t = \{t | 0 < t\}$は時間，$w = n(\dot{u}_f - \dot{u}_s)$，$(\quad)^{\cdot}$は時間微分を表すが，無次元変数を

$$U_s = \frac{u_s}{S}, \quad U_f = \frac{u_f}{S},$$
$$W = n\left(\mathring{U}_f - \mathring{U}_s\right), \quad P = \frac{p}{q},$$
$$\tau = \frac{c_v t}{H^2}, \quad X = \frac{x}{H} \tag{5}$$

と定義すれば，式(3)，(4)の無次元表示が得られる．

<u>***u**-**w**-p*</u>

$$\frac{G_s \mathrm{e}}{1 + G_s \mathrm{e}} \overset{\circ\circ\circ}{U}_s + \frac{\mathrm{e}^2}{1 + G_s \mathrm{e}} \overset{\circ\circ\circ}{U}_f = 4h^2 \frac{\partial^2 \mathring{U}_s}{\partial X^2} - 4h^2 \frac{\partial \mathring{P}}{\partial X} \tag{6-a}$$

$$\frac{(1 + \mathrm{e})\mathrm{e}}{1 + G_s \mathrm{e}} \overset{\circ\circ}{U}_f = -4h^2 \frac{\partial P}{\partial X} - 4h^2 \frac{\mathrm{e}}{1 + \mathrm{e}} \left(\mathring{U}_f - \mathring{U}_s\right) \tag{6-b}$$

$$\frac{\partial \mathring{U}_s}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial X} = 0 \tag{6-c}$$

<u>***u**-p*</u>

$$\frac{e(G_s + e)}{1 + G_s e} \overset{\circ\circ\circ}{U}_s - 4h^2 \frac{\partial^2 \mathring{U}_s}{\partial X^2} + 4h^2 \frac{\partial \mathring{P}}{\partial X} = 0 \tag{7-a}$$

$$\frac{e(1 + e)}{1 + G_s e} \frac{\partial \overset{\circ\circ}{U}_s}{\partial X} - 4h^2 \frac{\partial \mathring{U}_s}{\partial X} + 4h^2 \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = 0 \tag{7-b}$$

ここに，$\mathrm{X} = \{\mathrm{X} | 0 < \mathrm{X} < 1\}$は無次元座標，$\tau = \{\tau | 0 < \tau\}$は時間係数，$(\quad)^{\circ}$は時間係数による微分を表す．また，

$$h = \frac{c_p H}{2 c_v}, \quad c_p = \sqrt{\frac{E_c}{\rho'}}, \quad c_v = \frac{k E_c}{\gamma_w},$$
$$\rho' = \rho_s + \frac{\rho_f}{e^2}, \quad G_s = \frac{\rho^s}{\rho^f},$$
$$\mathrm{e} = \frac{n}{1 - n}, \quad S = \frac{qH}{E_c} \tag{8}$$

であり，hは無次元パラメータ，c_pは非減衰波速，c_vは圧密係数，G_sは土粒子比重，eは間隙比，Sは静荷重q作用時の最

終沈下量である．なお，***u-w-p*** の方程式系(6)を変形すると

$$\overset{\circ\circ\circ}{U}_s + 4h^2\overset{\circ\circ}{U}_s - 4h^2\frac{\partial^2\overset{\circ}{U}_s}{\partial X^2} = 0 \qquad (9)$$

という減衰波動方程式が得られ，その理論解の n 次モードは，固有値$\beta_n = (2n-1)\pi/2$と無次元パラメータhの大小関係に応じてその性質が変化する [2]．

- $\beta_n < h$：過減衰（指数関数解）
- $\beta_n = h$：臨界減衰
- $\beta_n > h$：減衰振動（三角関数解）

さて，式(6)および式(7)について，それぞれ Noda and Toyoda[1]および Noda et al.[3]に倣い，有限要素法および Christian・田村流の物理モデルにより空間離散化し，Wilson-θ 法の時間積分公式を組み合わせると，以下の代数方程式の形に整理できる．

<u>空間離散化した時間積分公式・Wilson-θ 法の内挿公式</u>

$$\mathrm{A}\boldsymbol{u}_{n+\theta} = \mathrm{B}\boldsymbol{u}_n \qquad (10\text{-a})$$

<u>Wilson-θ 法の引き戻し公式</u>

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \mathrm{C}\boldsymbol{u}_n + \mathrm{D}\boldsymbol{u}_{n+\theta} \qquad (10\text{-b})$$

自由度毎の未知変数の成分からなる係数列ベクトル$\boldsymbol{u}_n$，およびマトリクスA～Dの中身は ***u-p*** と ***u-w-p*** で異なり，その具体形は紙幅の都合上省略するが，(10-b)に(10-a)を代入することで以下の連立漸化式を構築できる．

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \mathrm{E}\boldsymbol{u}_n\,, \qquad \mathrm{E} = \mathrm{C} + \mathrm{D}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \qquad (11)$$

そこで，式(11)中のマトリクス E のスペクトル半径

$$\rho(\mathrm{E}) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_N|) \qquad (12)$$

（ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$はEの固有値）を調べれば，式(11)の漸化式の安定性を評価できる．すなわち，$\rho(\mathrm{E}) \leq 1$であれば，あらゆる初期値$\boldsymbol{u}_0$に対し発散することなく step 更新可能（安定）であるといえる．

一方, Noda et al.[3]は, 水～土連成式の符号反転に着目し，その計算可否が次式で定義される係数$\gamma_{\theta 1}$の正負により判定できると考えた（$\gamma_{\theta 1} > 0$のとき安定）．

$$\gamma_{\theta 1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t}\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \qquad (13)$$

以降，$\gamma_{\theta 1}$による ***u-p*** 計算可否判定の妥当性にも言及する．

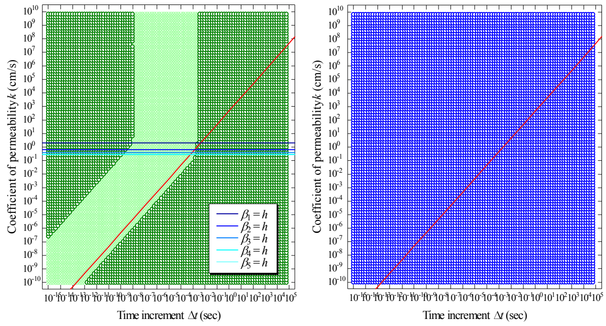
３．解析結果

透水係数kおよび時間刻み幅Δtを変えたときの ***u-p*** および ***u-w-p*** の方程式系の安定性を式(12)のスペクトル半径$\rho(\mathrm{E})$から判定した．ただし，要素分割数を $m = 10$ とし（これ以上分割数を増やしても安定性に影響がないことを確認済），典型的なパラメータとして，$\theta = 1.4$，層厚 $H = 1$m，ヤング率 E = 10000kPa，ポアソン比 ν = 0.30，土粒子比重 $G_s = 2.65$，間隙比 e = 1.0 を与えた．また，下端は変位固定・非排水境界，上端を変位自由・大気圧境界とした．固有値解析には Intel® Math Kernel Library を使用した．

u-p および ***u-w-p*** による収束判定結果を Fig. 1 に，また，同図中の点(a)，(b)における時刻歴を Fig. 2 に示す．

まず，Fig. 1 の収束判定に着目すると，***u-p*** においては，Fig. 1(a)のように帯状の発散域（$\rho(\mathrm{E}) > 1$）が出現するのに対し，***u-w-p*** では，同図(b)のように全域が収束域（$\rho(\mathrm{E}) \leq 1$）となることから，***u-w-p*** であればあらゆる透水係数・時間刻み幅に対して安定して計算を継続できる．

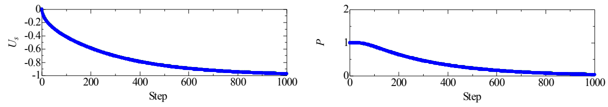
次に，Fig. 1(a)の ***u-p*** 発散域の形態に着目すると，図の下側（低透水性）では収束域と発散域の閾線は斜めに分布し，式(13)より導かれる $\gamma_{\theta 1}$ 基準線（$\gamma_{\theta 1}$ = 0，図中の赤線）による計算可否判別が概ね有効であるといえるが，上側（高透水性）では閾線が縦に分布し，$\gamma_{\theta 1}$ 基準線にそぐわない結果となる．これは，「***u-p*** では解けない現象」の性質が上側と



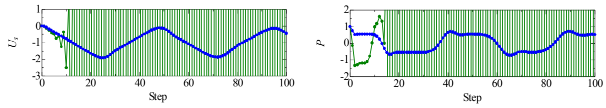
○ Possible　× Impossible　　　○ Possible

(a) ***u-p***　　　(b) ***u-w-p***

Fig. 1 Numerical stability estimated by spectral radius ρ(E)



(A) Point A (k = 10^{-1} cm/s, Δt = 10^{-3} sec)



(B) Point B (k = 10^{3} cm/s, Δt = 10^{-3} sec)

— ***u-p***　— ***u-w-p***

Fig. 2 Time history of dimensionless solid displacement at top (left) and dimensionless fluid pressure at bottom (right)

下側で異なることによる．すなわち，閾線が斜めになる範囲は，図中の $\beta_1 = h$ 線下側で（式(9)の理論解に過減衰モードを 1 つ以上含む領域, Fig. 2(a)のような静的圧密が解かれる）と一致し，閾線が縦になる範囲は，$\beta_1 = h$ 線上側（式(9)の理論解の全モードが減衰振動解となる領域，（Fig. 2(b)のような振動が解かれる）と一致している．また，斜めの閾線と縦の閾線では，相異なるモード（$\beta_1 = h$ 線上側では有意な土骨格加速度を含むモード）の固有値の絶対値が 1 を超えることも確認している．なお, 詳細は割愛するが， Fig. 1(a)の ***u-p*** 発散域と収束域の閾線近傍や，左上側のような（Δtが非常に小さく step 毎の固相変位がほとんど進行しない）非圧縮域においては，たとえ$\rho(\mathrm{E}) \leq 1$の安定域あっても，***u-p*** 解が ***u-w-p*** 解と一致しない（***u-p*** 計算は安定するが正しく解けない）領域が出現する点に注意を要する．

４．おわりに

本稿では，***u-p*** および ***u-w-p*** の空間離散化された支配方程式および時間積分公式より構築した連立漸化式のスペクトル半径による安定判別を通して，***u-p*** 発散域でも ***u-w-p*** であれば安定して計算継続可能であることを示した．また，高透水／非圧縮領域における $\gamma_{\theta 1}$ 基準の例外の出現を確認した．さらに，***u-p*** で安定して解ける場合でも，その解が必ずしも ***u-w-p*** 解と一致するとは限らない点を指摘した．

参考文献

1) T. Noda and T. Toyoda: Development and verification of a soil–water coupled finite deformation analysis⋯, Soils Found, 59, pp.888-904, 2019.
2) T. Toyoda and T. Noda: Numerical simulation based heuristic investigation of inertia-induced phenomena⋯, Soils Found, 61, pp.352-370, 2021.
3) T. Noda, A. Asaoka and M. Nakano: Soil-water coupled finite deformation analysis⋯, 48, pp.771-790, 2008.