セメント改良土の力学挙動の再現に向けた SYS Cam - clay model の拡張

セメント改良土，SYS Cam-clay model，修正応力

名古屋大学　国際会員　○山田正太郎　中野正樹
野田利弘　　酒井崇之

1. はじめに

別報[1]では，室内要素試験結果に基づいて，セメント改良土の力学挙動と自然堆積粘土の力学挙動の類似点と相違点について列挙した．本稿では，これらの知見を参考に土の骨格構造の働きを記述する土骨格の弾塑性構成式 SYS Cam-clay model[2]をセメント改良土の力学挙動も再現できるように拡張する．

2. 拡張の概要

既に述べた通り，自然堆積粘土の力学挙動の再現に実績のある SYS Cam-clay model をベースに考える．これは，塑性圧縮を伴う軟化挙動など，セメント改良土が自然堆積粘土と類似した力学挙動を示すためである．以下，このモデルの拡張の要点を三つに分けて述べる．

第一に，**図 1** に示す通り各負荷面を平行移動する．このような方法は，セメント添加した土を対象にした多くのモデルでも同様に取られてきたものである[3),4)]．引張応力にも耐え得るようになるという意味で，セメント添加による効果を素直に表現する手法と言える．後述するように，この拡張によりセメント改良土に特有の限界状態線より上側での塑性圧縮挙動が表現可能になる．

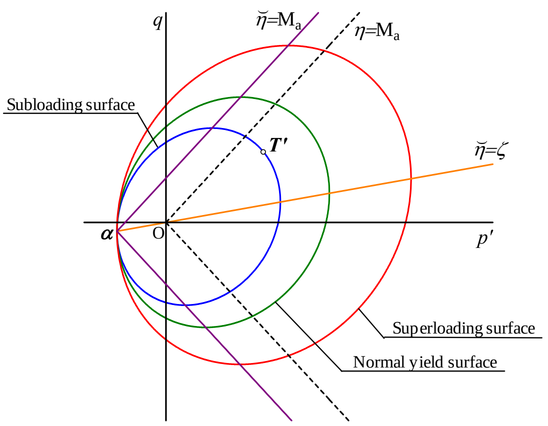

図 1　3 つの負荷面の平行移動

第二に，塑性変形に伴って各負荷面の原点からのズレが解消されるようにモデル化する．実験より，セメント改良土は塑性変形の結果，練返した改良土に漸近すること，ならびに，練返した改良土は自然堆積粘土を練返した土と同様な挙動を示すことが分かっている．この点を考慮して，塑性変形の結果，いずれ Cam-clay model に帰着するように，このようなモデル化を図る．

第三に，現有効応力から各負荷面の平行移動量（**図 1** の $\boldsymbol{\alpha}$）を差し引いた修正応力を用いてモデルを記述する．各負荷面の平行移動により平均有効応力 p' が負になる可能性が生まれるが，一方で Cam-clay model は $\mathrm{v}-\ln p'$（v は比体積）に基づくモデルであるために，対数内が負にならないような対応が必須になる．後述する修正応力の適用はこれを解決するための方法である．塑性変形の結果，当該モデルがいずれ Cam-clay model に帰着するためにも有効な方法である．

以下では，上記の第一と第三の要点に基づき，SYS Cam-clay model を修正応力を用いて記述した後，第二の要点を考慮すべく $\boldsymbol{\alpha}$ の発展則を与えて，モデルを完成させる．なお，以下において $\boldsymbol{T}'$ は有効応力(引張を正)，$\boldsymbol{D}$ はストレッチング(引張を正)である．また，$\boldsymbol{D}$ は弾性成分 $\boldsymbol{D}^e$ と塑性成分 $\boldsymbol{D}^p$ に加算分解できるものとする．

3. 修正応力で記述した SYS Cam-clay model

<u>(a) 修正応力の定義（有効応力の変更）：</u> 有効応力 $\boldsymbol{T}'$ から背応力 $\boldsymbol{\alpha}$ を引くことで，修正応力 $\breve{\boldsymbol{T}}'$ を定義する．

$$\breve{\boldsymbol{T}}' = \boldsymbol{T}' - \boldsymbol{\alpha} \tag{1}$$

以下では，$\breve{\boldsymbol{T}}'$ をセメント改良土の有効応力に見立てて定式化を進める．

<u>(b) 下負荷面：</u> SYS Cam-clay model における下負荷面を，修正応力 $\breve{\boldsymbol{T}}'$ を用いて次式のように表す．

$$\begin{aligned} & f(\breve{p}',\breve{\eta}^*) + \mathrm{MD}\ln R^* + \mathrm{MD}\ln R + \int_0^t J\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D}^p d\tau = 0, \\ & f(\breve{p}',\breve{\eta}^*) = \mathrm{MD}\ln\frac{\breve{p}'}{\tilde{p}'_{c0}} + \mathrm{MD}\ln\frac{\mathrm{M}^2+\breve{\eta}^{*2}}{\mathrm{M}^2} \end{aligned} \tag{2}$$

ここに，$\mathrm{D}=(\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa})/\mathrm{Mv}_0$，$J=\mathrm{v}/\mathrm{v}_0$ であり，$\tilde{p}'_{c0}$ は初期の正規降伏面の大きさを表している．$\tilde{\lambda}$，$\tilde{\kappa}$，M はそれぞれ圧縮指数，膨潤指数，限界状態定数である．$\breve{p}'=-(1/3)\breve{\boldsymbol{T}}'$，$\breve{\eta}^*=\|\hat{\breve{\boldsymbol{\eta}}}\|$，$\hat{\breve{\boldsymbol{\eta}}}=\breve{\boldsymbol{\eta}}-\boldsymbol{\beta}$，$\breve{\boldsymbol{\eta}}=\breve{\boldsymbol{s}}/\breve{p}'$，$\breve{\boldsymbol{s}}=\breve{\boldsymbol{T}}'+\breve{p}'\boldsymbol{I}$ であり，$\boldsymbol{\beta}$ は各負荷面の回転を表すための背応力比である．R^* は上負荷面に対する正規降伏面の相似比，R は上負荷面に対する下負荷面の相似比であり，各負荷面の相似中心は $\boldsymbol{\alpha}$ にあるものとする．したがって，各負荷面は原点より $\boldsymbol{\alpha}$ だけ平行移動した位置に存在する．

<u>(c) 弾性構成式：</u> 弾性構成式には，p' の代わりに $\breve{p}'$ を使用した拘束圧依存の速度型 Hooke 則を用いる．

$$\begin{aligned} & \mathring{\breve{\boldsymbol{T}}}' = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} = \left(\tilde{K}-\frac{2}{3}\tilde{G}\right)(\mathrm{tr}\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}})\boldsymbol{I} + 2\tilde{G}\boldsymbol{D}^{e}, \\ & \tilde{K} = \frac{J\mathrm{v}_0}{\tilde{\kappa}}\breve{p}', \quad \tilde{G} = \frac{3(1-\nu)}{2(1+\nu)}\tilde{K} \end{aligned} \tag{3}$$

ここに，ν はポアソン比，$\mathring{(\ )}$ は共回転速度である．

<u>(d) 関連流れ則：</u>修正応力空間における下負荷面の勾配を用いた関連流れ則を採用する．

$$\boldsymbol{D}^p = \Lambda\frac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}, \quad (\Lambda>0) \tag{4}$$

<u>(e) 構造・過圧密・異方性の発展則：</u> R^*, R, $\boldsymbol{\beta}$ の発展則の具体形を式(5), (6) ,(7)でそれぞれ与える．

Extension of SYS Cam-clay model for reproduction of the mechanical behavior of cement treated soils:
Shotaro YAMADA, Masaki NAKANO, Toshihiro NODA and Takayuki SAKAI (Nagoya University)

$$\dot{R}^* = JU^*\left\{(1-c_s)(-D_v^p)+c_s\sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{D}_s^p\|\right\},\qquad(5)$$
$$U^* = \frac{a}{\mathrm{D}}R^{*b}(1-R^*)^c$$

$$\dot{R} = JU\|\boldsymbol{D}^p\|,\ \ U=-\frac{m}{\mathrm{D}}\ln R \qquad (6)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} = J\frac{b_r}{\mathrm{D}}\sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{D}_s{}^p\|\|\breve{\boldsymbol{\eta}}^*\|\breve{\boldsymbol{\eta}}_b,\ \ \breve{\boldsymbol{\eta}}_b = m_b\frac{\breve{\boldsymbol{\eta}}^*}{\|\breve{\boldsymbol{\eta}}^*\|}-\boldsymbol{\beta} \qquad (7)$$

ここに，$D_v^p=\mathrm{tr}\boldsymbol{D}^p$，$\boldsymbol{D}_s^p=\boldsymbol{D}^p-(1/3)(\mathrm{tr}\boldsymbol{D}^p)\boldsymbol{I}$ である．また，a,b,c,c_s,m,m_b,b_r は各内部状態変数の発展速さを規定する材料定数である．記述の簡略化のために，式(5)～(7)を以下のように表しておく．

$$\dot{R}^* = \Lambda Jr^*,\ \ r^*=U^*\left\{(1-c_s)\left(-\mathrm{tr}\frac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\right)+c_s\sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\right)^*\right\|\right\} \qquad (5')$$

$$\dot{R} = \Lambda Jr,\ \ r=U\left\|\frac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\right\| \qquad (6')$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}} = \Lambda J\boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{b}=\frac{b_r}{\mathrm{D}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\right)^*\right\|\|\breve{\boldsymbol{\eta}}^*\|\breve{\boldsymbol{\eta}} \qquad (7')$$

(f) 塑性乗数： 式(2)の適応条件および式(3), (4), (5’), (6’), (7’)から塑性乗数は Λ 次式のように導かれる．

$$\Lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\cdot\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}}{J\dfrac{\mathrm{MD}}{(\mathrm{M}^2+\breve{\eta}^{*2})\breve{p}'}(\mathrm{M}_s{}^2-\breve{\eta}^2)+\dfrac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\cdot\boldsymbol{E}\dfrac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}} \qquad (8)$$

ここに，

$$\mathrm{M}_s{}^2 = \mathrm{M}_a{}^2+3\breve{p}'\breve{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{b}-(\mathrm{M}^2+\breve{\eta}^{*2})\breve{p}'\left(\frac{r^*}{R^*}-\frac{r}{R}\right) \qquad (9)$$

$$\mathrm{M}_a{}^2=\mathrm{M}^2+\xi^2,\ \ \xi^2=\sqrt{3/2}\|\boldsymbol{\beta}\| \qquad (10)$$

であり，$\breve{\eta}^2=\mathrm{M}_s{}^2$ および $\breve{\eta}^2=\mathrm{M}_a{}^2$ はそれぞれ硬化と軟化，塑性圧縮と塑性膨張の閾線としての意味を持つ．

(g) 弾塑性構成式： 式(3)に，$\boldsymbol{D}^e=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^p$ に次いで式(4)を代入することにより，次式が得られる．

$$\overset{\circ}{\breve{\boldsymbol{T}}}{}' = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}-\Lambda\boldsymbol{E}\frac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'} \qquad (11)$$

(h) 負荷基準： 負荷基準は式(8)の分母が正の値を取ることを前提に次式で与える．

[1] $\dfrac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\cdot\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}>0$ ： $\boldsymbol{D}^p\neq\boldsymbol{0}$ （負荷） (12a)

[2] $\dfrac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\cdot\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\leq 0$ ： $\boldsymbol{D}^p=\boldsymbol{0}$ （除荷） (12b)

(i) 状態方程式： 次式を満たすように初期値を与えるものとする．なお，初期値をこのように与えた場合には，各状態量は式(13)を常に満足する．

$$\mathrm{v}=\mathrm{N}-\tilde{\lambda}\ln\breve{p}'-(\tilde{\lambda}-\tilde{\kappa})\ln\frac{R^*}{R}\frac{\mathrm{M}^2+\breve{\eta}^{*2}}{\mathrm{M}^2} \qquad (13)$$

ここに， N は NCL の切片である．

上記は，有効応力 $\boldsymbol{T}'$ を $\breve{\boldsymbol{T}}'$ に単に置き換えた以外はSYS Cam-clay model そのままである．その結果得られた式(11)は $\overset{\circ}{\breve{\boldsymbol{T}}}{}'$ と $\boldsymbol{D}$ の関係であり，これを $\overset{\circ}{\boldsymbol{T}}{}'$ と $\boldsymbol{D}$ の関係に書き換える必要がある，以下では $\boldsymbol{\alpha}$ の発展則を与えることでこれを成し遂げる．

4. セメンテーションの喪失と真の有効応力速度

(j) $\boldsymbol{\alpha}$ の発展則： $\boldsymbol{\alpha}$ は $\eta=\zeta$ 軸上に存在するものとする．このとき，$\boldsymbol{\alpha}$ は以下のように表される．

$$\boldsymbol{\alpha}=-(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{I})\Psi,\ \ \Psi=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{\alpha} \qquad (14)$$

Ψ は各負荷面の原点からのずれの大きさを与える状態量（応力の次元を有する）であり，一種のセメンテーション効果を表す．実験結果に基づき，塑性変形に伴いセメンテーション効果が失われてゆく，すなわち Ψ はゼロに漸近すると仮定して，Ψ の発展則を次式で与える．

$$\dot{\Psi}=JV\|\boldsymbol{D}^p\|,\ \ V=-\frac{d}{D}\Psi \qquad (15)$$

式(15)の $V(\Psi)$ は Ψ の単調減少関数であり，$V(0)=0$ を満たす．d は Ψ の減少速さを規定する材料定数であり，セメンテーション劣化指数と称する．他の内部状態変数の発展則と同様に，式(15)を以下のように表しておく．

$$\dot{\Psi}=\Lambda J\psi,\ \ \psi=V\left\|\frac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}\right\| \qquad (15')$$

$\boldsymbol{\alpha}$ の共回転速度は式(14)より次式のように表される．

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}}=-\overset{\circ}{\boldsymbol{\beta}}\Psi-(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{I})\dot{\Psi} \qquad (16)$$

式(16)に式(7’)および(15’)を代入することにより，$\boldsymbol{\alpha}$ の発展則として次式が得られる．

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}}=\Lambda J\boldsymbol{a},\ \ \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}\Psi-(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{I})\psi \qquad (16')$$

(g’) 弾塑性構成式： (16’)を用いることで，式(11)は次式の通り $\overset{\circ}{\boldsymbol{T}}{}'$ と $\boldsymbol{D}$ の関係に書き換えられる．

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{T}}{}'=\overset{\circ}{\breve{\boldsymbol{T}}}{}'+\overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}-\Lambda\left(\boldsymbol{E}\frac{\partial f}{\partial\breve{\boldsymbol{T}}'}+J\boldsymbol{a}\right) \qquad (17)$$

なお，式(17)のように表しておくことにより，有効応力の定義が変わっても，初期値・境界値問題の解析コードのアルゴリズムを大きく変える必要はない。

5. おわりに

別報 [1]ではセメント改良土に特有の挙動として限界状態線の上側での塑性圧縮挙動を挙げた．本モデルでは $\breve{\eta}^2=\mathrm{M}_a{}^2$ より下側が塑性圧縮領域となるため，各負荷面を平行移動させたことによって，限界状態線 $\eta^2=\mathrm{M}_a{}^2$ よりも上側で塑性圧縮が生じるようになる．この点を含め実験結果の再現性能について別報 [5]にて示す．

参考文献）1) 福和ら(2015): セメント改良した.., 第 50 回地盤工学研究発表会． 2) Asaoka, et al. (2002): An elasto-plastic description ..., *S&F*, **42**(5), 47-57. 3) Gens and Nova (1993): Conceptual bases for a constitutive ..., *Proc. 1st Int. Conf. Hard Soils and Soft Rocks*, 485-494. 4) Kasama et al. (2000): On the stress-strain behaviour ..., *S&F*, **40**(5), 37-47. 5) 岡野ら(2015): 拡張した SYS Cam-clay model による..., 第 50 回地盤工学研究発表会.