

複合負荷状態を有する二重硬化弾塑性構成式の提案

弾塑性 二重硬化 複合負荷

名古屋大学 国際会員 ○山田正太郎 野田利弘 中野正樹 中井健太郎
(財)地震予知総合研究振興会 国際会員 浅岡 顕

1. はじめに

本稿では、二重硬化弾塑性構成式と称する土骨格に対する弾塑性構成式の新たな枠組みを提案する。二重硬化モデル (Double hardening model) と呼ばれるモデルは本稿で提案するモデル以外にも幾つか存在するが、それらは、例えばキャップモデル¹⁾のように降伏関数を繋ぎ合わせたようなモデルであるか、等方成分とせん断成分に別々の負荷面を用意するようなモデル²⁾である。本稿では紙幅の許す限り提案するモデルの概要を説明するが、提案モデルでは独立して存在し得る2つのモデルが、複合的な負荷状態を生じながら互いに両立する状態を呈するという点において他のモデルと一線を画する。

2. モデルの概要

モデルの土台となるのは、土の骨格構造の働きを記述する SYS Cam-clay model³⁾である。提案モデルでは、図1に示すように、上負荷面^{3),4)}と下負荷面⁵⁾の間に新たに中負荷面を設ける。別報⁶⁾に示す通り、この中負荷面が過去に受けた応力履歴を主に記憶する実質的な正規降伏面としての役割を果たす。このモデルに組み合わせるもう一つのモデルは図2に示す Drucker-Prager model⁷⁾と同様な円錐形の降伏面に、SYS Cam-clay model と同じ楕円形の塑性ポテンシャル面を組み合わせたモデルである (以下、DP model と称する)。正規降伏面は非硬化とし、そ

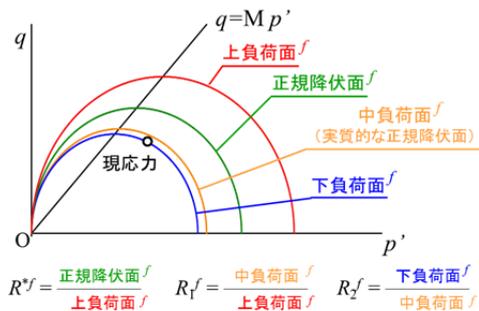


図1 SYS Cam-clay model の負荷面

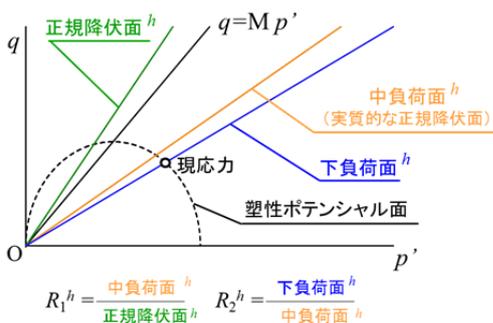


図2 DP model の負荷面

の内側にはやはり中負荷面と下負荷面を設ける。両下負荷面は現応力を常に共有しながら滑らかな土骨格の弾塑性挙動を呈する。

3. 弾塑性構成式の定式化

(a) ストレッチングの加算分解と4つの負荷/除荷状態: ストレッチング D (引張を正)を弾性成分 D^e と塑性成分 D^p に加算分解し、更に塑性成分 D^p を二つの成分 D^{pf} と D^{ph} に加算分解する。

$$D = D^e + D^p = D^e + D^{pf} + D^{ph} \quad (1)$$

$$(D^p = D^{pf} + D^{ph})$$

上記二つの塑性成分の発生の有無の組み合わせから、負荷/除荷状態は以下に示す4つに分類される。

- [1] $D^{pf} \neq 0, D^{ph} \neq 0$: 複合負荷
- [2] $D^{pf} \neq 0, D^{ph} = 0$: f 成分単独負荷
- [3] $D^{pf} = 0, D^{ph} \neq 0$: h 成分単独負荷
- [4] $D^{pf} = 0, D^{ph} = 0$: 完全除荷

(b) 弾性構成式: 弾性構成式には、別報⁸⁾に示した Einav and Puzin⁹⁾が提案する超弾性構成式を有限変形に対応させた式を採用する。

(c) 降伏関数: 以下に示す二種類の降伏関数を採用する。

$$\text{降伏関数 } F : F = f(p', \eta) + \ln \frac{R^{*f}}{R_1^f R_2^f} - \frac{\varepsilon_v^p}{\rho - \gamma}$$

$$= \ln \frac{p'}{P_0^f} + \ln \frac{M^2 + \eta^2}{M^2} + \ln \frac{R^{*f}}{R_1^f R_2^f} - \frac{\varepsilon_v^p}{\rho - \gamma} = 0 \quad (2)$$

$$\text{降伏関数 } H : H = h(\eta) - \frac{1}{2}(c_D M R_1^h R_2^h)^2$$

$$= \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}(c_D M R_1^h R_2^h)^2 = 0 \quad (3)$$

降伏関数 F は SYS Cam-clay model の降伏関数を、降伏関数 H は DP model の降伏関数を表す。ここに、 M, ρ, γ, c_D はいずれも材料定数であり、 $R^{*f}, R_1^f, R_2^f, R_1^h, R_2^h$ は図1と2の中に示すように、各負荷面の相似比を表す。また、 ε_v^p は対数体積ひずみであり、 P_0^f は $\varepsilon_v^p = 0$ のときの正規降伏曲面の足の位置を表す。 $f(p', \eta)$ と $h(\eta)$ はそれぞれの下負荷面を表す。それぞれ下負荷面 f と下負荷面 h と呼ぶことにする。なお、本稿ではモデルの基本構造の理解に力点を置くため、異方性は考慮しない。

(d) 流れ則: 両塑性ストレッチングとも下負荷面 f を塑性ポテンシャル面とする流れ則によって規定する。

$$D^{pf} = \Lambda^f \frac{\partial f}{\partial T'} \quad (\Lambda^f > 0) \quad (4a)$$

$$D^{ph} = \Lambda^h \frac{\partial f}{\partial T'} \quad (\Lambda^h > 0) \quad (4b)$$

Λ^f と Λ^h は塑性乗数である。SYS Cam-clay model にとっては関連流れ則を、DP model にとっては非関連流れ則を適用したことになる。

(e) 内部状態変数の発展則： 具体形については、紙幅の都合上割愛するが、各項は D^{pf} や D^{ph} の発生に伴って各面の相似比が単調に 1 に向かって増大する性質を有するように与える。

(f) 塑性乗数： 式(4)の2つの塑性乗数 Λ^f と Λ^h は、2つの下負荷面に対する適応条件から求まる。複合負荷時には、連立して、単独負荷時には単独で適応条件を解く。

(a) に示した各負荷状態に対する塑性乗数は形式上以下のように表すことができる。

$$[1] \quad \Lambda^f = \frac{\left(d \frac{\partial f}{\partial T'} - b \frac{\partial h}{\partial T'} \right) \cdot ED}{ad - bc}, \quad \Lambda^h = \frac{\left(a \frac{\partial h}{\partial T'} - c \frac{\partial f}{\partial T'} \right) \cdot ED}{ad - bc} \quad (5a)$$

$$[2] \quad \Lambda^f = \frac{\frac{\partial f}{\partial T'} \cdot ED}{a}, \quad (5b)$$

$$[3] \quad \Lambda^h = \frac{\frac{\partial h}{\partial T'} \cdot ED}{d} \quad (5c)$$

ここに、 E は弾性係数テンソルであり、 a, b, c, d は、いずれも適応条件を満たすように決まる。 a と d は式(5b)と(5c)が示す通り単独負荷時の塑性乗数の分母であり、 b と c はそれぞれ a と d に類似の形をしている。

なお、複合負荷状態において塑性ストレッチングは次式のように表される。

$$D^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial T'}, \quad \Lambda = \frac{\left\{ (d-c) \frac{\partial f}{\partial T'} + (a-b) \frac{\partial h}{\partial T'} \right\} \cdot ED}{ad - bc} \quad (6)$$

(g) 弾塑性構成式： 式(1)と(4)および弾性構成式から、弾塑性構成式は以下のように表される。

$$\dot{T}' = ED - \Lambda E \frac{\partial f}{\partial T'} \quad (7)$$

式(6)と(7)より、塑性ポテンシャル面を下負荷面 f にとったことに起因して、形式上は SYS Cam-clay model の弾塑性構成式と同形対応する（ただし、弾塑性行列は非対称）。異なるのは塑性乗数だけで、SYS Cam-clay model を主体にしてみれば、内部状態の発展則に複雑な式を当てはめたかのように見えることになる。また、塑性乗数の分子を見ると、塑性変形が最大となる仮想的な弾性速度 ED の方向は、両降伏曲面の法線の線形結合によって決まること、すなわちこの観点からは楕円体とも円錐形ともたれない降伏曲面が存在しているように映ることになる。

上記以外にも、触れるべき点は多々ある。負荷基準がその一つで、 a, b, c, d に課せられるべき制約を満足する

ように内部状態変数の発展則を与えた上で、負荷基準を適切に与えることにより各負荷状態を遷移するときにおいても滑らかな応答が現れる。その他に除荷時や単独負荷時における内部状態変数の発展について合理的に規定することも重要な要素となる。これらに関する説明は紙幅の都合上、別の機会に譲る。

4. 砂と粘土の違いについて

これまで、著者らは砂と粘土の違いを構造と過圧密の発展速度の違いとして説明してきた³⁾が、提案する二重硬化弾塑性構成式ではこの説明に変更を要する。このモデルにおいては DP model が存在を主張するときに砂的挙動が、逆に DP model が影を潜める時に粘土的挙動が現れる。式(6)において d が a, b, c に卓越すると f 成分の単独負荷時の塑性乗数に帰着することから粘土では d が大きくなるように発展則パラメータを与える必要があることが分かる。上負荷面によって Cam-clay model に構造概念を導入することによって自然堆積粘土の弾塑性挙動が再現できることをこれまでに示してきたが、 d が大きいときには、その実績がそのまま生きてくる。

5. おわりに 本稿では等方硬化モデルに限定して二重硬化弾塑性構成式の基本的枠組みを説明した。砂を対象としたこの構成式の応答例を、別報^{6),10)}にて実験結果との比較を交えながら示す。サイクリックモビリティや締固めの定量的再現にとっては異方性の存在が極めて重要な役割を果たすが、異方性について考慮したモデルについては別の機会に説明を行う。

参考文献

- 1) Drucker G. and Henkel (1957) : Soil mechanics and work hardening theories of plasticity, *ASCE*, **122**, 339-346.
- 2) Banerjee S. et al (1992) : Simple double-hardening model for geomaterials, *J.Geotech.Engrg.*, **118**, 889-901.
- 3) Asaoka, A. et al. (2002): An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils, *S&F*, **42**(5), 47-57.
- 4) Asaoka, A. et al. (2000): Superloading yield surface concert for highly structured soil behavior, *S&F*, **40**(2), 99-110.
- 5) Hashiguchi, K. (1989) : Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. Journal of Solids and Structures*, **25**, 917-945.
- 6) 水野ら(2014): 二重硬化弾塑性構成式による応力履歴を受けた砂のせん断挙動の再現, 第 49 回地盤工学研究発表会概要集.
- 7) Drucker, D. C. and Prager, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis for limit design, *Quarterly of Applied Mathematics*, **10**(2), pp. 157-165.
- 8) 野田ら(2014): 超弾性構成式に基づく SYS Cam-clay model の諸特性, 第 49 回地盤工学研究発表会概要集.
- 9) Itai Einav and Alexander M. Puzrin (2004): Pressure-dependent elasticity and energy conservation in elastoplastic models for soils, *Journal of geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 81-92.
- 10) 岡田ら(2014): 二重硬化弾塑性構成式による砂の排水/非排水せん断挙動の再現, 第 49 回地盤工学研究発表会概要集.