慣性力 連成解析 不飽和土

## 1. はじめに

**u-p<sup>w</sup>-p<sup>a</sup>** formulation に基づき運動方程式(慣性力を考慮)を 解く場合,エレメントワイズに等体積変形を満足する不飽和土 の均質一様変形場は,無限小の緩速載荷の場合にのみ実現し, 無限小でない載荷速度では必ず間隙水圧と間隙空気圧に勾配が 生じることを Noda et al (2013)<sup>1)</sup>に倣い理論的に考察した. さら に,この理論的考察に参照しつつ,速度型の運動方程式に基づ く空気~水~土骨格連成有限変形解析コード<sup>2)</sup>を用いて,均質 一様変形場を実現可能であることを確認した.

## 2. 理論的考察

上下端ともに剛で摩擦が無いようなペデスタルを介して,非 排気非排水条件下で行う完全矩形供試体の定率鉛直伸張・圧縮 試験を想定する.慣性系にデカルト座標系を設定し,水平方向 と鉛直方向に,基準座標として X<sub>1</sub> と X<sub>2</sub>,現座標として x<sub>1</sub> と x<sub>2</sub> をとると,土骨格の一様変形場は次式で表される.

$$x_1 = \frac{1}{1 + \delta t} X_1$$
,  $x_2 = (1 + \delta t) X_2$  (1)

ここに、 $\delta$ は鉛直方向の単位時間・単位長さ当たりの伸び率、tは時間を表す.  $X_1X_2=x_1x_2$ がエレメントワイズに等体積変形することを表している.式(1)について、土骨格の速度と加速度を求めると次式になる.

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{(1+\hat{\alpha})^2} X_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = \delta X_2$$
 (2)

$$\ddot{x}_1 = \frac{2\delta^2}{(1+\delta t)^3} X_1$$
,  $\ddot{x}_2 = 0$  (3)

ここに、上付き"・"は士骨格から見た物質時間微分を表す.加速度は水平方向のみに生じることに注意する.

さらに、重力を考慮せず、鉛直・水平方向に均質一様な変形が保たれる場合を仮定すると、 $u-p^w-p^a$  formulation に基づく混合体の運動方程式は式(4)になる.

$$\rho \ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \quad , \quad \rho \ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \tag{4}$$

ここに、 $\rho$  は混合体としての不飽和土の密度で、 $T_1$ , $T_2$  は全応 力の  $x_1$ , $x_2$  方向の主値である. 有効応力の式として平均化骨格 応力<sup>3)</sup>を用いると、式(4)の右辺は以下のように変形される.

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( T_1' - s^w p^w - s^a p^a \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( T_1' - p^a + s^w p^s \right)$$
$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( T_2' - p^a + s^w p^s \right)$$
(5)

ここに、 $s^w$  は飽和度 ( $s^a=1-s^w$ ) ,  $p^w$  は間隙水圧,  $p^a$  は間隙 空気圧,  $p^s$  はサクションを表す. 土骨格の均質一様変形場を想 定しているため有効応力の空間的変化はなく, さらに飽和度, サクションも空間的変化はないと仮定する. このとき式(5)は,

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial p^a}{\partial x_1} \quad , \quad \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial p^a}{\partial x_2} \tag{6}$$

となり、式(4)と式(6)より運動方程式は次式になる.

名古屋大学 国際会員 〇野田利弘 名古屋大学 学生会員 吉川高広

$$\frac{2\rho\delta^2}{\left(1+\partial t\right)^2}x_1 = -\frac{\partial p^a}{\partial x_1} \quad , \quad 0 = -\frac{\partial p^a}{\partial x_2} \tag{7}$$

間隙空気圧は x<sub>2</sub> 方向には分布せず, x<sub>1</sub> 方向には式(7)を積分 して式(8)になる.

$$p^{a}(x_{1},t) = p^{a}_{0}(t) - \frac{\rho\delta^{2}}{(1+\delta t)^{2}} x_{1}^{2}$$
(8)

ここに、 $p^{a}_{0}(t)$ は積分定数である.式(8)より、間隙空気圧が空間的に分布しないためには $\delta=0$ が必要であり、有限の載荷速度では必ず間隙空気圧勾配が生じる.サクションは空間的に分布しないと仮定したため、間隙水圧についても同様である.また、 $\rho$ は $x_{1}$ 方向に関して均質一様と考えたが、有限の載荷速度の場合は $p^{w} \ge p^{a}$ が $x_{1}$ 方向に分布することと、間隙水と間隙空気は $p^{w} \ge p^{a}$ に応じて密度が変化することから、間隙水と間隙空気の非圧縮性の仮定が必要となる.

土供試体の幅を 2B(-B  $\leq X_1 \leq B$ )とし、セル圧 C が一定に 作用している場合を想定すると、式(1)により式(8)の積分定数 が求まって、

$$P^{a}(X_{1},t) = C + T_{1}' + s^{w} p^{s} - \frac{\rho \delta^{2}}{\left(1 + \partial t\right)^{4}} \left(X_{1}^{2} - B^{2}\right)$$
(9)

となる.式(9)は間隙空気圧の値の確認に必要である.間隙水 圧は、サクション一定の条件より式(10)から確認する.

$$P^{w}(X_{1},t) = P^{a}(X_{1},t) - p^{s}$$
(10)

また、間隙空気の流速  $v^{a}$  は、水の単位体積重量を  $\gamma_{w}$ 、間隙 空気の密度を  $\rho^{a}$ 、透気係数を  $k^{a}$  とすると、

$$v^{\prime a}{}_{1}(x_{1},t) = -\frac{k^{a}}{\gamma_{w}} \left( \frac{\partial p^{a}}{\partial x_{1}} + \rho^{a} \ddot{x}_{1} \right) = \frac{k^{a}}{\gamma_{w}} \frac{2\delta^{2}}{\left(1 + \delta t\right)^{2}} x_{1} \left(\rho - \rho^{a}\right)$$
$$v^{\prime a}{}_{2} = 0 \tag{11}$$

であるため、均質変形を満足させるには $k^a=0$ が必要となる. 間隙水の流速に関しても同様であるため、透水係数 $k^w=0$ が必要となる.



3. 計算条件

図1 有限要素メッシュと境界条件

図1は有限要素メッシュと境界条件を示す.供試体の中心が 原点になるように座標軸を設定した.縦 8.0cm,横 3.5cm,80 ×35=2800 要素の有限要素メッシュを,平面ひずみ条件で, 上下端から変位速度 500cm/sec の一定速度で載荷した.前章で 述べたように,上下端は剛で摩擦がない.

Realization of uniform deformation based on the soil-water-air coupled analysis taking account of inertia forces

弾塑性パラメータ			発展則パラメータ			初期値		
NCLの切片	Ν	2.0	正規圧密土化指数	т	0.2	構造の程度	$1/R_0^{*}$	1.0
限界状態定数	М	1.55	構造劣化指数	а	0.0	過圧密比	$1/R_0$	5.0
圧縮指数	λ	0.108	構造劣化指数	C <sub>s</sub>		応力比	$\eta_0$	0.0
膨潤指数	κ	0.025	回転硬化指数	$b_r$	0.0	異方性の程度	$\zeta_0$	0.0
ポアソン比	v	0.300	回転硬化限界定数	$m_b$				
水分特性曲線		物性値						
最大飽和度 [%]	100.0		土粒子密度 [g/cm³]	2.65				
残留飽和度 [%]	19.4		水の密度 [g/cm³]	1.00				
α [kPa <sup>-1</sup> ]	0.05	空気	の気体定数 [m²/sec²/K]	287.042				
n (m=1-1/n)	1.09		絶対温度 [K]	293.15 (20°C)		C)		

## 表1 材料定数と初期値

表 1 は材料定数と初期値を示す.水分特性式は van Genuchten 式を用いた.前章で考察したように、一様変形を再 現するために透水係数と透気係数は0とし、水と空気は非圧縮 性とする.初期セル圧は 300kPa,空気圧は 0kPa,サクション は100kPaに設定した(飽和度は約88%).



図2は載荷直後の点P(図1参照)の加速度の時間変化を示 す.初期の速度と加速度に理論値を用いた場合(s=0, s につ いては後述),初期の段階において解が振動し,その後理論値 とほぼ一致する様子が見られた.図は省略するが,間隙空気圧 と間隙水圧も付随して振動した後に理論値とほぼ一致した.そ こで,Wilsonの  $\theta$  法に準拠した躍度(加速度の時間微分)を 直線近似する考え方<sup>4)</sup>を参考にして,式(12),(13)に示した方 法で初期の速度と加速度を理論値よりもわずかに小さい値を用 いる(s=199435)と,解の振動はなくなった.

$$\mathbf{v}|_{0} = \frac{4}{s\Delta t} \left( \mathbf{x}|_{0} - \mathbf{x}|_{-s\Delta t} \right) - 3\mathbf{v}|_{-s\Delta t} - \dot{\mathbf{v}}|_{-s\Delta t} \left( s\Delta t \right) - \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{v}}|_{-s\Delta t} \left( s\Delta t \right)^{2}$$
(12)

$$\dot{\boldsymbol{v}}\big|_{0} = \frac{12}{\left(s\Delta t\right)^{2}} \left(\boldsymbol{x}\big|_{0} - \boldsymbol{x}\big|_{-s\Delta t}\right) - \frac{12}{s\Delta t} \boldsymbol{v}\big|_{-s\Delta t} - 5\dot{\boldsymbol{v}}\big|_{-s\Delta t} - \ddot{\boldsymbol{v}}\big|_{-s\Delta t} \left(s\Delta t\right)$$
(13)

時間に関する導関数が全て正値になるのに対し、本解析コード では、座標に関して高々3 階までの時間に対する導関数しか扱 うことができないため、理論的に完全な均質変形場を表現する ことができず、速度や加速度をわずかに小さく抑える必要があ ることを意味していると考えている<sup>1)</sup>. 実際に計算に用いたス テップ時間間隔  $\Delta t = 10^9 \text{sec}$  であり、点 P における理論値と低 減値はそれぞれ、速度は 218.7500 cm/sec と 218.7499 cm/sec , 加速度は 54687.5gal と 54684.4gal であり、理論値と比べてわず かに小さいだけで、事実上理論値と一致していると言えるだろ う.図3 は軸ひずみ 20%までの加速度の時間変化を理論値と 計算値で比較した図で、変形が大きい範囲でも両者はほぼ一致 した.



図4はせん断ひずみ、間隙空気圧、間隙水圧のコンター図を 示す. せん断ひずみの図から均質に変形している様子がわかる. 間隙空気圧は、式(8)で示した  $x_1=0$  で頂点となる上に凸の放物 線を描くが、計算結果も  $x_1=0$  で最大値をとる形で分布してい る. 紙幅の都合上図は省略したが、式(9)で示した理論値とほ ぼ一致することを確認した. 間隙水圧に関しても同様である. 5. おわりに

慣性力を考慮する空気〜水〜土骨格連成解析による均質一様 変形場を理論的に考察し、材料と幾何学的非線形性を扱うため に速度型の運動方程式を用いる解析コードによって、その実現 が可能であることがわかった.均質一様変形場の実現は、数値 解析コードの較正に役立つため、それを確認することは大変重 要である.

参考文献 1) Noda, Xu and Asaoka (2013): Realization of uniform deformation of soil specimen..., *S&F*, to be submitted. 2) 野田・中野・吉川・浅岡(2012): 空気~水~土骨格連成有限変形解析を用いた..., 第 47 回地盤工学研究発表会, No.335, 667-668. 3) Jommi, C. (2000): Remarks on the constitutive modelling of unsaturated soils, Experimental Evidence and Theoretical Approaches in Unsaturated Soils, Tarantino, A. and Mancuso, C. eds., Balkema, pp.139-153. 4) Noda and Asaoka (2008), Soil-water coupled finite deformation analysis..., *S&F*, 48(6), 771-790.