

固有振動解析による土構造物・地盤系の地震応答特性の把握
 Comprehension of seismic response characteristics of soil structure - ground system
 by eigen vibration analysis

清水亮太¹, 野田利弘¹, 山田正太郎¹, 浅岡顕²

1 名古屋大学大学院・工学研究科社会基盤工学専攻・shimizu@soil.civil.nagoya-u.ac.jp
 2 地震予知総合研究振興会

概 要

本稿では、地盤の初期値・境界値問題に対して固有振動解析する方法について示すとともに、土構造物を有する地盤の地震応答解析を水～土骨格連成有限変形解析コード *GEOASIA* によって行った。具体的には、土構造物・地盤系の初期の固有振動数を算定した上で、系の各固有振動数と地震動の卓越周期に着目しながら、系の地震応答の特徴について調べた。加えて、土構造物・地盤系の固有振動数の経時的変化に着目して、土構造物の耐震性や土構造物と地盤の相互作用について考察した。なお、本稿の解析で対象にしたような有限変形の弾塑性問題では、幾何学および材料的非線形性を有するため固有振動数は時々刻々変化するが、それでも土構造物・地盤系の初期の固有振動数および固有モードが、その系の相互的な振動特性を把握する上で重要であることを示した。

キーワード：土構造物・地盤系，地震応答解析，固有振動解析，相互作用，水～土連成有限変形計算

1. はじめに

本稿では、地盤の初期値・境界値問題に対して、水～土骨格連成式を考慮した固有振動解析手法について示すとともに、土構造物を有する地盤の地震応答解析を水～土骨格連成有限変形解析コード *GEOASIA*¹⁾ によって行う。具体的には、土構造物・地盤系の初期の固有振動数を算定した上で、系の固有振動数に合わせた規則波を地盤に入射することによって、土構造物と地盤系の相互的な振動特性を把握するとともに、有限変形の弾塑性問題においても初期の固有振動数および固有モードが系全体の運動を把握する上で重要であることを示す。

2. 有限要素離散化された速度型運動方程式と水～土骨格連成式の固有値問題としての定式化

弾塑性体のような速度型構成式で表される物体の動的境界値問題では、速度型運動方程式を解く必要がある。そこで、速度型運動方程式を弱形式化し、土骨格の構成式として有効応力を用いて記述された弾塑性構成式を適用すると共に、有限要素離散化することによって、形式上、以下のように表される連立常微分方程式が得られる²⁾。

$$[M]\{\ddot{v}\} + [K]\{v\} - [L]^T \{\dot{u}\} = \{f\} \quad (1)$$

ここに、 $[M]$ は質量マトリックス、 $[K]$ は接線剛性マトリク

ス、 $[L]$ は土骨格の速度を土骨格の体積変化に変換するマトリックス、 $\{v\}$ は節点の速度ベクトル、 $\{\dot{u}\}$ は要素の間隙水圧速度である。

地盤と基盤（地盤の下端）の境界に粘性境界を与えた場合、解くべき連立常微分方程式は、減衰項を有する運動方程式として次式のように表される。

$$[M]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} - [L]^T \{\dot{u}\} = \{f\} \quad (2)$$

ここに、 $[C]$ は粘性境界を導入したことによって生じる減衰マトリックスであり、非比例減衰である。

また、水～土骨格連成式については、飽和土の連続式および平均的な間隙水の流速式に基づいて、各要素の中心に間隙水圧 u を代表させる Christian 流³⁾または田村流⁴⁾の物理モデルを拡張して用いると、形式上、以下のように表される連立常微分方程式が得られる²⁾。

$$[L']\{\ddot{v}\} - [L]\{v\} + [H]\{u\} + [G]\{\dot{u}\} = \{f_s\} \quad (3)$$

ここに、 $[L']$ は $[L]$ を変形して作られるマトリックス、 $[H]$ は透水係数マトリックス、 $[G]$ は間隙率と水の圧縮率で与えられるマトリックスである。

さらに、有限要素法の速度場に線形制約条件が課せられる場合を考慮すると、解くべき連立常微分方程式の斉次方程式は次式のように表される²⁾。

$$\begin{cases} [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{v}}\} + [\mathbf{C}^*]\{\dot{\mathbf{v}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{v}\} - [\mathbf{L}]^T\{\dot{\mathbf{u}}\} - [\mathbf{C}]^T\{\dot{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{L}]\{\dot{\mathbf{v}}\} - [\mathbf{L}]\{\mathbf{v}\} + [\mathbf{H}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{G}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \\ -[\mathbf{C}]\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ は Lagrange の未定乗数であり、 $[\mathbf{C}]$ は線形制約条件を表すマトリックス、 $-[\mathbf{C}]^T\{\dot{\mathbf{u}}\}$ は節点に加わる束縛力を表す。

ここで、Foss の方法⁵⁾に倣って、

$$\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{w}\} \quad (5)$$

とおくと、式(4)は、

$$\begin{cases} [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{w}}\} + [\mathbf{C}^*]\{\dot{\mathbf{w}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{w}\} - [\mathbf{L}]^T\{\dot{\mathbf{u}}\} - [\mathbf{C}]^T\{\dot{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{w}}\} - [\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{w}}\} = \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{L}]\{\dot{\mathbf{w}}\} - [\mathbf{L}]\{\mathbf{w}\} + [\mathbf{H}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{G}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \\ -[\mathbf{C}]\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (6)$$

と書き換えることができる。式(6)の連立常微分方程式をまとめてマトリックスで表現すれば、

$$[\mathbf{A}]\{\dot{\mathbf{x}}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{x}\} \quad (7)$$

となる。ここに、

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}^*] & [\mathbf{M}] & -[\mathbf{L}]^T & [\mathbf{O}] \\ [\mathbf{M}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] \\ [\mathbf{L}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{G}] & [\mathbf{O}] \\ [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{x}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{\mathbf{w}\} \\ \{\mathbf{u}\} \\ \{\dot{\mathbf{u}}\} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$[\mathbf{B}] = - \begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] & -[\mathbf{C}]^T \\ [\mathbf{O}] & -[\mathbf{M}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] \\ -[\mathbf{L}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{H}] & [\mathbf{O}] \\ -[\mathbf{C}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] & [\mathbf{O}] \end{bmatrix} \quad (8)$$

である。

ここで、 $\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_0\}e^{i\omega t}$ および $\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_0\}e^{i\omega t}$ 、 $\{\dot{\mathbf{u}}\} = \{i\dot{\mathbf{u}}_0\}e^{i\omega t}$ と表されると仮定すると、

$$\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x}_0\}e^{i\omega t}, \quad \text{ここに} \quad \{\mathbf{x}_0\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}_0\} \\ \{\mathbf{w}_0\} \\ \{\mathbf{u}_0\} \\ \{i\dot{\mathbf{u}}_0\} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (9)$$

が得られる。このように表される $\{\mathbf{x}\}$ が存在するのであれば、次式で表される一般固有値問題に帰結する。

$$\lambda[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}_0\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{x}_0\} \quad (10)$$

なお、この一般固有値問題を解いて得られる固有値と固有ベクトルは、一般に複素数と複素ベクトルであり、本稿では固有モードが共役な複素固有値に対応する複素固有ベクトルの実部と虚部の線形結合で表されることから固有モードを複素固有ベクトルの成分の実部で表されるモードと虚部で表されるモードを用いて間接的に表現する。

3. 固有振動モードに与える水～土骨格連成効果

地盤の初期値・境界値問題に対して、本稿で示した方法で固有振動解析を行う際に、地盤を土骨格一相系で与えた場合と水～土骨格二相系で与えた場合とで得られる固有モードにどのような違いが現れるか比較する。

3.1 解析条件

計算に用いた有限要素メッシュを図 1 に示す。高さ 30(m)、幅 1(m)とした。計算は二次元平面ひずみ条件で行い、無限に続く水平地盤を想定して、一次元メッシュを用いるとともにメッシュ側面には周期境界を与え、メッシュ下端水平方向には粘性境界($\rho=2.0\text{g/cm}^3$, $V_s=570\text{m/s}$)を与えた。一見すると、棒の振動を考えるような条件に見えるが、左右両方向に同じ地盤が連続している条件になっている。表 1 に地盤の材料定数および初期値をそれぞれ示す。材料定数は砂を想定した値となっている。また、初期の比体積を 1.4 として地盤内で一定とした。連成させる場合は水の体積圧縮率を $9.81 \times 10^{21}(\text{kN/m}^2)$ とした。以上の計算条件のもとで、2. で示した方法を用いて、地盤を土骨格一相系で与えた場合と水～土骨格二相系で与えた場合について固有振動解析を行った。

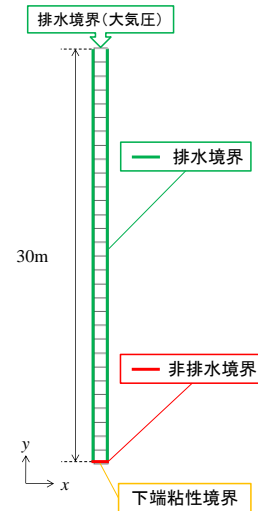


図 1 有限要素メッシュ図

表 1 材料定数および初期値

地盤の弾塑性性状					
《弾塑性パラメータ》		《発展則パラメータ》			
圧縮指数	$\hat{\lambda}$	0.180	正規圧密土化指数	m	0.300
膨潤指数	$\hat{\kappa}$	0.012	構造劣化指数	a	2.500
限界状態定数	M	1.500		b	0.800
NCLの切片	N	2.300		c	2.000
ポアソン比	ν	0.400		c_s	1.000
			回転硬化指数	b_r	0.200
透水係数(cm/s)	k	0.100	回転硬化限界定数	m_r	0.450
《初期値》					
比体積	v_n	1.400	静止土圧係数	K_n	1.000
構造の程度	$1/R_n^*$	1.000	異方性の程度	K_a	1.000

3.2 解析結果

計算によって得られた固有振動数・固有モードを図 2、図 3 に示す。なお、本稿では計算によって得られた固有振動数の最小値から順に第 1 固有振動数、第 2 固有振動数としている。また、同図の実部および虚部は複素固有ベクトルの成分の実部で表されるモードと虚部で表されるモードをそれぞれ表している。

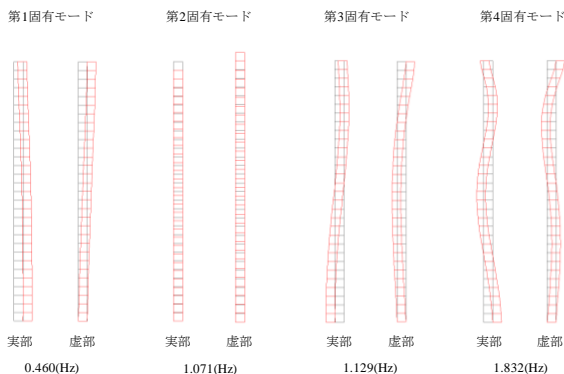


図 2 固有振動数および固有モード（土骨格一相系）

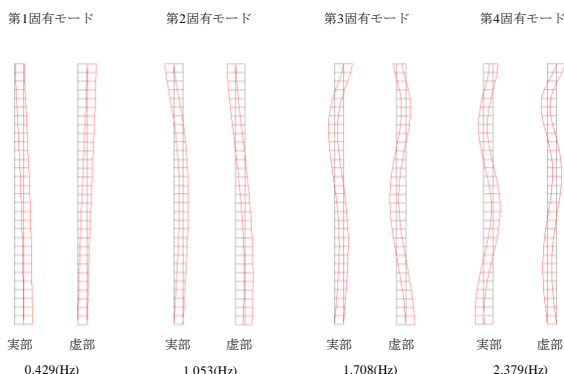


図 3 固有振動数および固有モード（水～土骨格二相系）

図 2 に示す地盤を土骨格一相系で与えた場合の固有モードに着目すると、第 2 固有モードからも分かるように、地盤の体積変化を生じさせるモードが現れることが見て取れる。一方、図 3 の地盤を水～土骨格二相系で与えた場合の固有モードに着目すると、どのモードも等体積変形を生じさせるようなモードであることが見て取れる。これは非圧縮性の水によって土骨格が束縛されていることが原因であると考えられる。つまり、2. で示した方法は間隙水による土骨格の束縛を考慮した固有振動解析手法であることが確認できる。

4. 土構造物・地盤系の地震応答解析

本章では、まず、土構造物を有する地盤に対し、2. で示した方法を用いて固有振動解析を行い、系全体としての固有振動数および固有モードについて調べる。次に、ここで得られた固有振動数と同じ振動数の規則波を地盤下端に入射することによって、土構造物・地盤系の相互的な振

動特性を把握する。

4.1 解析条件

計算は二次元平面ひずみ条件で行い、水平飽和粘土地盤の上に盛土を施工した場合を考える。計算に用いた有限要素メッシュを図 4 に示す。粘土地盤の境界条件として地盤下端の水平方向に粘性境界($\rho=2.0\text{g/cm}^3$, $V_s=570\text{m/s}$)を与え、側方には周期境界を与えた。盛土は飽和状態とし、水～土骨格二相系の弾塑性有限要素を図 4 に示す位置に追加し、圧密が終了するまで計算を行った。ここでは、実際の盛土とは異なり、一回で全ての盛土要素を地盤上に立ち上げ、定常状態に落ち着くまで圧密放置を行った。表 2 および表 3 に計算で用いた地盤と盛土の材料定数および初期値を示す。粘土地盤にはトチクレーの材料定数を用い、盛土材には珪砂 7 号とトチクレーを混ぜた中間土の材料定数を用いた⁶⁾。以上の条件より、圧密放置後の土構造物・地盤系に対し、2. で示した方法を用いて固有振動解析を行った。

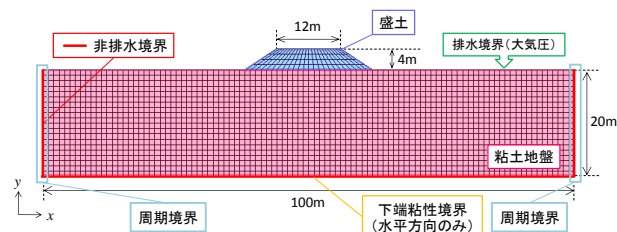


図 4 有限要素メッシュ図

表 2 粘土地盤の材料定数および初期値

粘土地盤の弾塑性性状					
《弾塑性パラメータ》			《発展則パラメータ》		
圧縮指数	$\tilde{\lambda}$	0.060	正規圧密土化指数	m	1.200
膨潤指数	$\tilde{\kappa}$	0.025	構造劣化指数	a	0.800
限界状態定数	M	1.100		b	1.000
NCL の切片	N	1.642		c	1.000
ポアソン比	ν	0.300		c_e	0.300
			回転硬化指数	b_r	0.001
透水係数(cm/s)	k	2.0×10^{-6}	回転硬化限界定数	m_b	1.000
《初期値》					
比体積	v_0	1.730	静止土圧係数	K_0	0.6658
構造の程度	$1/R_0^*$	30.00	異方性の程度	K_β	0.6658

表 3 盛土の材料定数および初期値

盛土の弾塑性性状					
《弾塑性パラメータ》			《発展則パラメータ》		
圧縮指数	$\tilde{\lambda}$	0.052	正規圧密土化指数	m	0.028
膨潤指数	$\tilde{\kappa}$	0.008	構造劣化指数	a	0.800
限界状態定数	M	0.750		b	1.000
NCL の切片	N	1.880		c	1.000
ポアソン比	ν	0.200		c_e	0.650
			回転硬化指数	b_r	30.00
透水係数(cm/s)	k	2.0×10^{-3}	回転硬化限界定数	m_b	0.960
《初期値》					
比体積	v_0	1.700	静止土圧係数	K_0	0.750
構造の程度	$1/R_0^*$	1.300	異方性の程度	K_β	0.750

4.2 土構造物・地盤系の固有振動数と固有モード

計算によって得られた第1固有振動数・固有モードを図5に、第2固有振動数・固有モードを図6にそれぞれ示す。また、同図の実部モードおよび虚部モードは複素固有ベクトルの成分の実部で表されるモードと虚部で表されるモードをそれぞれ表している。

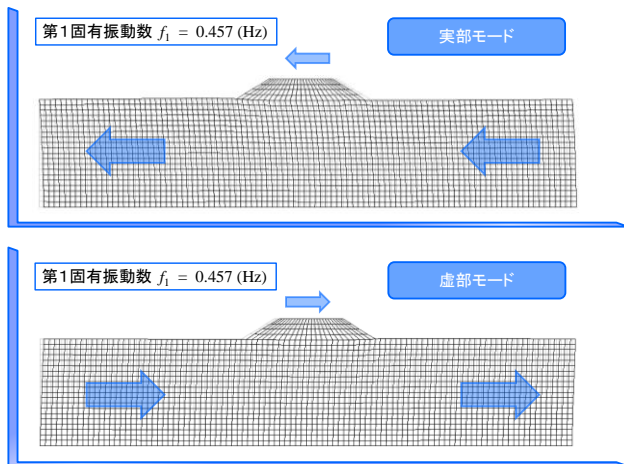


図5 第1固有振動数および固有モード

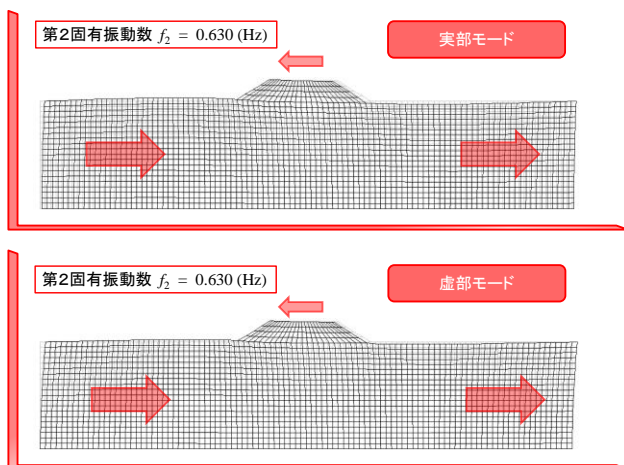


図6 第2固有振動数および固有モード

図5を見ると、第1固有モードは地盤の水平方向の運動に対して同じ向きに盛土が運動するようなモードであることが分かる。一方、図6を見ると、第2固有モードは地盤の水平方向の運動に対して逆向きに盛土が運動するようなモードであることが見て取れる。

4.3 土構造物を有する地盤の地震応答解析

計算は前章で用いた圧密放置後の土構造物・地盤系を対象とした。入力加速度は正弦波で与え、最大加速度を $0.05g(m/s^2)$ 、振動数を前章の計算によって求めた第1固有振動数および第2固有振動数の値とした。なお、以下では規

則波の振動数として系の第1固有振動数を用いた場合をCase.1、第2固有振動数を用いた場合をCase.2とする。また、加振中の地盤と盛土の運動履歴を調べる際には図7に示した節点を採用した。

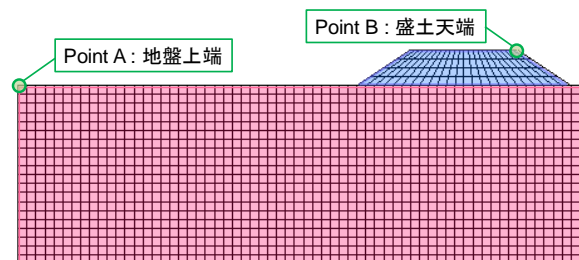


図7 地盤および盛土の運動履歴を調べる点

Case.1の場合の地盤および盛土の水平方向の運動を図8に、鉛直方向の運動を図9にそれぞれ示す。図8を見ると、地盤も盛土も約6秒まで変位が増大していることが分かる。このことから、加振初期において系全体の固有振動数が $0.457(Hz)$ 付近に存在し、共振が生じていると考えられる。また、地盤と盛土の水平変位はほぼ同位相で現れていることから、前章で得られた系全体としての第1固有モードが励起されていることが分かる。加えて、24秒付近から地盤と盛土の水平変位がある一定の値に落ち着いていることが見て取れる。これは、時間の経過に伴い、粘性境界による減衰効果によって定常振動状態となっているためであると考えられる。

Case.2の場合の地盤および盛土の水平方向の運動を図10に、鉛直方向の運動を図11にそれぞれ示す。図10を見ると、地盤も盛土も幾つかの波が集まってできる大きな波、すなわちうなりを確認することができる。したがって、加振初期における系全体の固有振動数が $0.630(Hz)$ 付近に存在し、その結果うなりが現れていると考えられる。また、地盤と盛土の水平変位は加振が進むにつれて互いに位相のずれを生じている。このことから前章で得られた系全体としての第2固有モードが励起されていることが分かる。

次に、各Caseにおける加振終了時までのせん断ひずみ分布図を図12および図13にそれぞれ示す。なお、ここでは揺れ方の違いを明確にするため、図中の変位量を3倍して表している。

図12および図13より、Case.1とCase.2のせん断ひずみの生じ方を比較すると、Case.2では盛土と地盤の境界や盛土直下の地盤にひずみが生じているのに対してCase.1では地盤と基盤の境界にもひずみが顕著に生じており、加振に伴って円弧上にひずみの局所化が進展していることが分かる。また、加振中の系の変形に着目して、図12および図13の一部分を拡大したものを図14に示す。地盤および盛土の変形の様子に前述の傾向が現れていることが見て取れる。

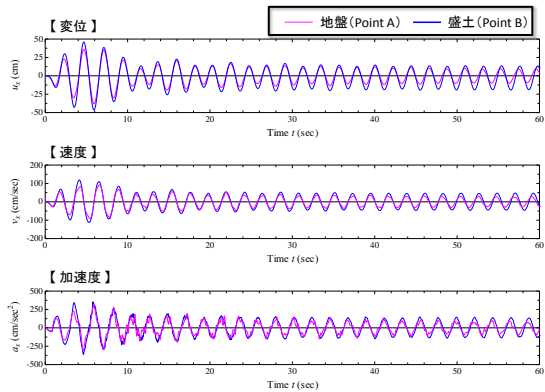


図 8 地盤および盛土の水平方向の運動 (Case.1)

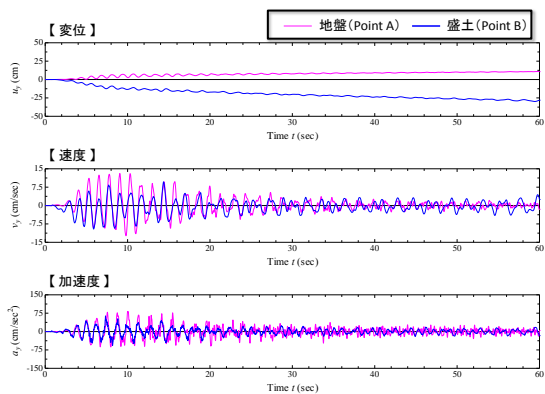


図 9 地盤および盛土の鉛直方向の運動 (Case.1)

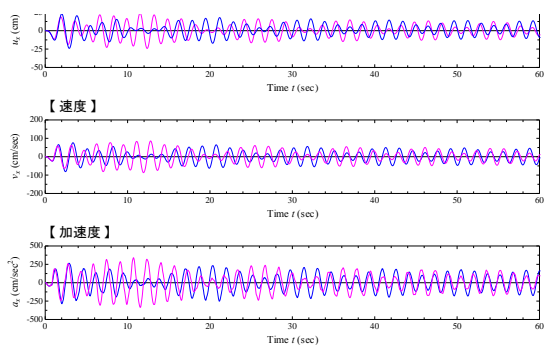


図 10 地盤および盛土の水平方向の運動 (Case.2)

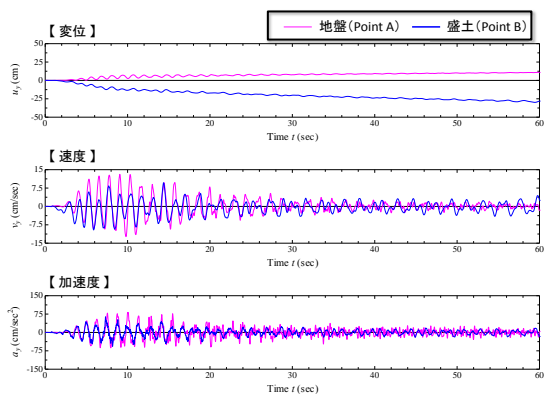


図 11 地盤および盛土の鉛直方向の運動 (Case.2)

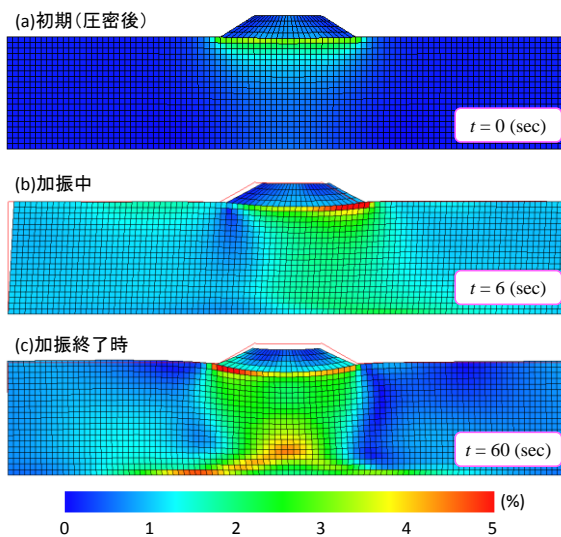


図 12 せん断ひずみ分布図 (Case.1)

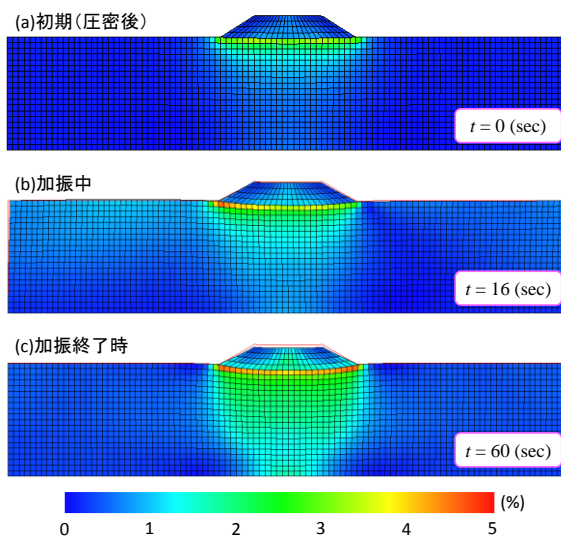


図 13 せん断ひずみ分布図 (Case.2)

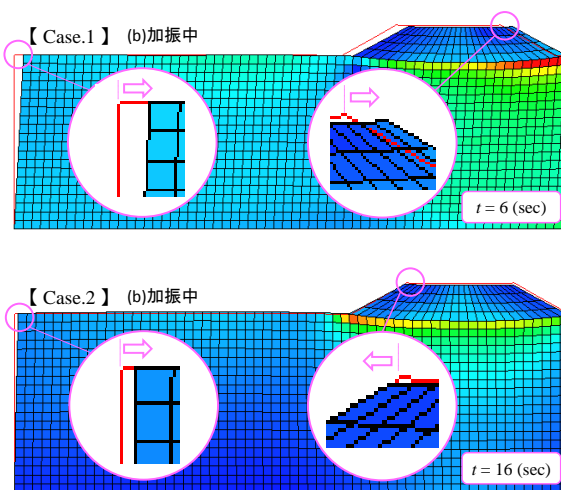


図 14 せん断ひずみ分布拡大図

5. 結論

本稿では、地盤の初期値・境界値問題に対して、間隙水による土骨格の束縛を考慮した固有振動解析手法について示した。今回の解析で対象にしたような有限変形の弾塑性問題では、幾何学および材料的非線形性を有するため固有振動数は時々刻々変化する。このため、線形問題のようにその系に真に固有の振動数およびモードが得られているわけではないが、それでも土構造物・地盤系の初期の固有振動数および固有モードが、その系の相互的な振動特性を把握する上で重要な値となっていることを本稿では示した。今後は各種土構造物の耐震性評価においても本稿で示した方法の利用を試みてゆきたい。

参考文献

- 1) Asaoka, A. and Noda, T. : All Soils All States All Round Geo-analysis Integration, International Workshop on Constitutive Modelling - Development, Implementation, Evaluation, and Application, Hong Kong, China, pp.11-27, 2007.
- 2) Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M. : Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-slay model, Soils and Foundations, Vol. 48, No. 6, pp. 771-790, 2008.
- 3) Christian, J. T.(1968) : Undrained stress distribution by numerical method, Proceedings of ASCE, Vol.94, SM6, pp.1331-1345.
- 4) 赤井浩一, 田村武(1978) : 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文集, 第269号, pp.95-104
- 5) Foss, K, A. : Coodinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.32, No.3, pp.361-364, Spet, 1958
- 6) Noda, T., Nakai, K. and Asaoka, A. (2008): Delayed failure of a clay foundation-embankment system after the occurrence of an earthquake, Theoretical and applied mechanics JAPAN, Vol.57, pp.41-47.