

Full-formulationに基づく水～土骨格連成有限変形解析 コードの開発とその検証

Development and Verification of a Full Formulation-based Soil-Water Coupled
Finite Deformation Analysis

豊田智大¹⁾, 野田利弘²⁾

Tomohiro Toyoda and Toshihiro Noda

1) 工修 名古屋大学 工学研究科 学生 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail:
toyoda.tomohiro@i.mbox.nagoya-u.ac.jp)

2) 工博 名古屋大学 減災連携研究センター教授 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: noda@civil.nagoya-u.ac.jp)

Soil-water coupled finite deformation analysis has usually been based on u - p formulation, whose set of equations is reduced by assuming “the relative acceleration of the fluid phase with respect to the solid phase is sufficiently smaller than the acceleration of the solid phase”. In response to the exponential progress of high-performance computation, we developed a sophisticated soil-water coupled finite deformation analysis code on the basis of full-formulation incorporating the exact equations without the assumption. The paper reveals that Full formulation-based code can conduct soil-water coupled analysis taking dynamic flow of pore water among the saturated soil into consideration.

Key Words : Mixture, Soil-Water Coupled Finite Deformation Analysis, Full-Formulation, Interaction, Material-Time Derivative

1. はじめに

近年、計算機の飛躍的な性能向上に伴い、方程式の元の数が多い問題も現実的な速度で解くことができるようになりつつある。このような流れの中で、計算手法をより要素数の大きい問題に適用する「大規模計算」が可能となることは言うまでもないが、その一方で、既往の計算手法における仮定や近似を外し、支配方程式を厳密に解く「高精度計算」もまた扱うことが出来るようになってきた。その一例として有限変形理論が挙げられるが、これは微小変形理論において無視された幾何学的非線形性、つまり幾何形状変化の影響を考慮した大変形解析を可能とするものである。

とくに、混合体理論に基づく飽和土の力学（水～土骨格連成解析）は、独立変数に土骨格の変位 u と間隙水圧 p をとる u - p formulationにより定式化される場合が大半である。この手法は「間隙水の土骨格に対する相対加速度が固相の加速度に対して極めて小さい」という仮定により方程式系を縮減するものであり、計算資源を大幅に節約することができる。しかしその代償として間隙水の動的浸透現象が無視されるため、極めて透水性の高い地盤といった間隙水が動的に運動しうる条件での解析は不可能となる。これに対し、Full-formulation (u - U - p formulation または u - w - p formulation, Biot^{[1])} は、上述の仮定を導入せず厳密な方程式系を解くものであり、独立変数として土骨格の変位 u 、間隙水圧 p に加え、間隙水の変位 U または相対変位 w をとるものである。Zienkiewicz et al.^{[2])}は Full-formulation (u - w - p formulation) に基づく微小変形線

形弾性解析を行い、透水係数の大きい問題や振動数の大きい問題では、 u - p formulationはFull-formulationと大きく異なる解を与えることを示している。このことから Full-formulationを導入し間隙水の動的応答を考慮することで、 u - p formulationに基づく弾塑性有限変形解析では解くことのできなかつた高透水性材料の解析が可能となることが期待される。そこで、本稿でははじめに、 u - p formulationに基づいて「速度型」運動方程式を解く地盤の静的/動的な水～土骨格連成有限変形解析コード **GEOASIA**^{[3])}と比較しつつ、Full-formulationに基づいて新たに開発した解析手法の要諦を述べる。ここでは、定式化の際に固相からみた物質時間微分と液相からみた物質時間微分の違いに注意する必要があることも強調する。さらにこの解析手法によって極めて透水性の高い材料の解析が可能となることを示す。

2. Full-formulationに基づく支配方程式の要諦

(1) 支配方程式

混合体理論に基づき、飽和土の構成要素である土粒子部分と間隙水部分にそれぞれ等価な連続体である固相と液相を考える。水～土骨格連成解析においては土骨格の変形現象と間隙水の浸透現象を連成して解くため、Full-formulation (u - U - p formulation) に基づく場合、場の未知数は固相の速度 v_s 、液相の速度 v_f 、間隙水圧 u の3つとなる。これらを求めるため、以下の3つの支配方程式を用いる。なお、材料と幾何的な非線形性を考慮するために up-dated Lagrange法を用いるが、このため運動方程式は速

度型で与え、躍度項が現れる。

混合体（飽和土）の運動方程式

$$\rho_s D_s^2 \mathbf{v}_s + \rho_f D_s D_f \mathbf{v}_f + \rho^f \left\{ (\text{tr} \mathbf{D}_s) + \frac{n}{K_f} (D_s u) \right\} (D_f \mathbf{v}_f - \mathbf{b}) = \text{div}(D_s \mathbf{s}_t) \quad (1)$$

液相の運動方程式（加速度を考慮したDarcy則）

$$\rho^f D_f \mathbf{v}_f = -\gamma_w \text{grad} h - \gamma_w \left(\frac{\rho^f g}{\gamma_w} - 1 \right) \mathbf{e}_3 - \frac{\gamma_w}{k} n (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \quad (2)$$

水～土骨格連成式（質量保存則）

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \text{div}(D_f \mathbf{v}_f) - \text{div} \mathbf{v}_s + \text{div}(k \text{grad} h) - \frac{n}{K_f} \rho^f (D_s u) = 0 \quad (3)$$

ここに、 ρ , ρ_s , ρ_f , ρ^f はそれぞれ混合体、固相、液相、間隙水の密度、 D_s , D_f はそれぞれ固相、液相にからみた物質時間微分作用素、 \mathbf{D}_s は固相の速度勾配テンソル、 n は間隙率、 K_f は間隙水の体積弾性率、 $\mathbf{b} = -g \mathbf{e}_3$ は物体力（ g は重力加速度、 \mathbf{e}_3 は鉛直上向きの単位ベクトル）、 $D_s \mathbf{s}_t$ はYatomi et al.^[4]の表記法にしたがう公称応力速度、 γ_w は間隙水の単位体積重量、 h は全水頭、 k は透水係数である。

一方、 u - p formulationの支配方程式は、Full-formulationの方程式(1), (3)に対して、「間隙水の土骨格に対する相対加速度が固相の加速度に対して極めて小さい」という仮定（ $D_s \mathbf{v}_s \gg D_f \mathbf{v}_f - D_s \mathbf{v}_s$ ）を代入して液相速度 \mathbf{v}_f を消去したものに相当する。 u - p formulationに基づく支配方程式を以下に示す。

混合体（飽和土）の運動方程式

$$\rho D_s^2 \mathbf{v}_s + \rho^f \left\{ (\text{tr} \mathbf{D}_s) + \frac{n}{K_f} (D_s u) \right\} (D_s \mathbf{v}_s - \mathbf{b}) = \text{div}(D_s \mathbf{s}_t) \quad (4)$$

水～土骨格連成式（質量保存則）

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \text{div}(D_s \mathbf{v}_s) - \text{div} \mathbf{v}_s + \text{div}(k \text{grad} h) - \frac{n}{K_f} \rho^f (D_s u) = 0 \quad (5)$$

u - p formulationに基づく解析手法である**GEOSIA**の場合、液相速度 \mathbf{v}_f を陽に求めないため、液相の運動方程式(2)を解く必要はなく、式(4), (5)を連立して解いていた。Full-formulationに基づく本研究では、式(1)～(3)を連立して液相の運動を厳密に解く。

以上の支配方程式について、空間離散化は、固相および液相の運動は4節点Iso-parametric要素を用いた有限要素法、間隙水圧は各要素の中心における値を代表させるChristian流^[5]または田村流^[6]の物理モデルを拡張^[7]した有限体積法により行う。時間積分は、固相および液相の運動は加速度のLagrange微分である「躍度」に線形性を仮定したWilsonの θ 法、間隙水圧およびその他の状態量は台形公式により、up-dated Lagrange法を用いて行う。紙幅の都合上、時空間離散化の詳細は割愛する。なお、構成式と

して土の骨格構造に着目した弾塑性構成モデル**SYS Cam-clay model**^[8]を搭載し、客観性のある応力速度としてGreen-Naghdi rate^[9]を使用する。式(2)右辺第3項は固相が液相に及ぼす相互作用力（浸透力と等価な物体力）であり、西村^[10]を参照しHagen-Poiseuille流れの類推により与える。

(2) 相対移流項の考慮

u - p formulationの支配方程式(4), (5)は、仮定により液相加速度を消去しているため、物質時間微分として固相にのった物質時間微分 D_s のみを含む。したがって、混合体の運動は固相に着目してLagrange的に時間積分してゆくことができた。一方、本研究で扱うFull-formulationの支配方程式(1)～(3)は、液相の運動を陽に解くため、固相にのった物質時間微分 D_s だけでなく、液相にのった物質時間微分 D_f が含まれる。液相の運動方程式(2)右辺第3項の相互作用項には液相速度 \mathbf{v}_f が含まれており、これは液相加速度 $D_f \mathbf{v}_f$ を積分して求めなければならない。

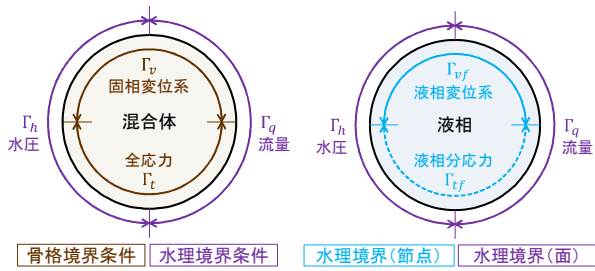
Darcy則に従うみかけの平均流速 $\mathbf{v} = n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$ は、固相に着目してその上を通過してゆく（固相と同位置にある）液相の速度を相対的に観測したものであるため、ある時刻における液相速度 \mathbf{v}_f は、その時刻に固相物質点と同じ位置 \mathbf{x} を占める液相物質点の速度を観測したものでなければならない。これは、（静的な）Darcy則が客観性を有するための必要条件に相当する。したがって、液相加速度 $D_f \mathbf{v}_f$ を直接時間積分した場合には同じ液相物質点（固相と同位置にあるとは限らない）を参照してしまうため、固相と同じ配置の液相速度を求めるためには液相からみた物質時間微分 $D_f \mathbf{v}_f$ を一旦固相からみた物質時間微分 $D_s \mathbf{v}_f$ に変換した上で時間積分する必要がある。その変換式を以下に示す。

$$D_s \mathbf{v}_f = D_f \mathbf{v}_f - \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \quad (6)$$

ここに右辺第2項は、 \mathbf{v}_f を観測する視点を液相から固相にのりかえる際に生じる相対速度分の移流項である。本研究では、この公式を用いて支配方程式(1)～(3)中に含まれる液相にのった物質時間微分 D_f をすべて固相にのった物質時間微分 D_s に統一した上で、固相にのってLagrange的に積分してゆくこととした。上記の相対移流項の存在により、液相の運動は固相にのってEuler的に観測されることとなる。これに伴い、固相の運動と液相の運動は同一の形状関数を用いて補間する。

(3) 境界条件

境界条件 u - p formulationにおける飽和土の境界条件を図-1(a)に示す。1つは混合体に関する境界条件であり、変位、速度、加速度に関する幾何的境界 Γ_v または応力、応力速度に関する力学的境界 Γ_t として節点ごと与えられる。もう1つは水理境界であり、全水頭（あるいは間隙水圧）に関する境界 Γ_h または間隙水の流量に関する境界 Γ_q として境界面ごと与えられる。Full-formulationでは、 u - p



(a) 混合体の境界条件 (b) 液相の境界条件
図-1 境界条件

formulationの境界条件に加え、図-1(b)のような「節点ごとの水理境界」を「境界面ごとの水理境界」とは別に与える。このとき、節点ごとの水理境界には、液相速度 v_f のDirichlet境界 Γ_{vf} とNeumann境界 Γ_{vf} の2種類が考えられる。とくに境界 Γ_{vf} は液相分応力 $T_f = -nuI$ を与える境界であるが、これは定式化の際に弱形式化して既に処理されており、その点における間隙水圧 u と間隙率 n から自動的に決まる。つまり、境界 Γ_{vf} では解析上境界条件を陽に課す必要はない。

3. 間隙水の動的浸透問題

図-2に示す一次元浸透場の下端に瞬間的に水圧を与えた場合について、 $u-p$ formulationおよびFull-formulationにより求めた流速の推移を図-3に示す。Full-formulationにおいては静止していた水が加速されてやがて定常流量に至るといった動的な浸透現象が表現できており、これは液相の運動方程式の理論解と完全に一致していることを確認している(Verification)。一方、 $u-p$ formulationでは動水勾配に従い即時的に定常流量に至るため、動的な浸透を考慮して解析することはできない。

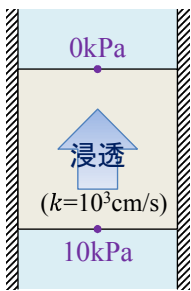


図-2 浸透場

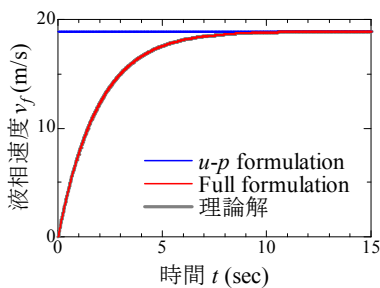


図-3 浸透解析結果

4. 供試体の非排水圧縮試験のシミュレーション

本研究で開発した解析コードを用いて、図-4に示すように、非排水条件下で平面ひずみ供試体を鉛直方向に圧縮したときの变形問題を解く。このとき、材料が不透水($k=0$)であれば、供試体内での間隙水のmigrationは起こらず、固相と液相は一緒に運動する($v_s = v_f$)こととなる。本章では、低透水性材料($k=10^{-7}$ cm/s)および高透水性材料($k=10^3$ cm/s)の2種類を想定し、供試体内で間隙水のmigrationが起こりうる条件で解析を行った。

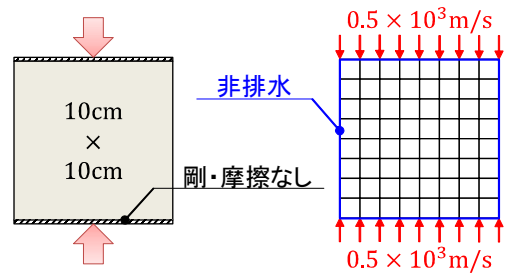


図-4 供試体の非排水水平面ひずみ圧縮問題

表-1 SYS cam-clay model の材料定数

弾塑性パラメータ	
圧縮指数 $\tilde{\lambda}$	0.500
膨潤指数 $\tilde{\kappa}$	0.040
NCLの切片 N	2.40
限界状態定数 M	1.40
ポアソン比 ν	0.30
発展則パラメータ	
正規圧密土化指数 m	(3.0)
構造劣化指数 a	(1.0)
構造劣化指数 b	(1.0)
構造劣化指数 c	(1.0)
構造劣化指数 c_s	(1.0)
回転硬化指数 b_r	(0.0)
回転硬化限界定数 m_b	(1.0)
物性値	
土粒子の密度 ρ^s (g/cm ³)	2.65
間隙水の密度 ρ^f (g/cm ³)	1.00
透水係数 k(cm/s)	10^{-7} or 10^3
水の単位体積重量 γ_w (kN/m ³)	9.81
水の体積弾性率 K_f (kPa)	(8)
初期状態	
過圧密比 $1/R_0$	1.0
構造の程度 $1/R_0^*$	1.0
応力比 η_0	0.0
異方性の程度 ζ_0	0.0
比体積 v_0	2.17

※ 括弧内の値は解析結果に影響を与えない

(1) 解析条件

初期条件、境界条件、材料定数を以下に示す。

初期条件：供試体は初期に静止しているとして、領域内の固相と液相の変位速度 v_s 、 v_f をゼロとした。また、初期間隙水圧として背圧-300kPa(負圧)を作用させた。

土骨格の境界条件：10cm×10cmの供試体を平面ひずみ条件のもと、上下端を一定の軸変位速度 10^3 m/sで変位させて圧縮した。この変位速度は、土骨格ならびに間隙水の動的な影響が顕在化するほど極めて高速である。また、上下端は剛で摩擦なしとした。慣性項を考慮した本手法では、摩擦がないこの条件でも、載荷に伴い矩形がそのまま保たれるような一様変形は示さず、間隙水のmigrationが生じてよい条件となる^[11]。

水理境界条件：4つの境界面をすべて非排水条件とすることにより、非排水試験を想定した。また、載荷面に垂直な方向の液相変位速度は、固相変位速度と同じとした。

材料定数と初期状態：SYS Cam-clay modelの材料定数および初期状態は、正規圧密土を想定して表1のとおり設定する。ただし、透水係数は低透水性材料($k=10^{-7}$ cm/s)と高透水性材料($k=10^3$ cm/s)の2種類を想定し、時間刻み幅は $\Delta t=10^{-5}$ secとした。

(2) 低透水性供試体の解析結果

Full-formulationによる解析結果として、間隙水の土骨格に対する相対速度、間隙水圧、比体積の各分布の推移をそれぞれ図-5、図-6、図-7に示す。図-5より、供試体内では水のmigrationはほとんど起こっていないことがわかるが、これは材料の透水係数が極めて小さいことによる。これに対応して、図-7では比体積分布は供試体内でほぼ一様であり、時間の経過に伴って変化しない。これは、要素間での間隙水の輸送がほとんど起こらないために、いずれの要素もほとんど圧縮/膨張し得ないことによる。一方、図-6に示す間隙水圧は供試体内で不均一に分布するが、これは供試体の非一様変形により動水勾配が生じていても、透水性が小さく水のmigrationがほとんど起こらないために動水勾配が解消されないことによるものである。なお、紙幅の都合上省略するがu-p formulation (GEOASIA)で同一の条件で解析を行った場合、上記の結果とほぼ同じ解が得られることを確認した。これは、透水係数が十分に小さいときには間隙水の運動は土骨格から見るとほとんど静的であり、u-p formulationにおける仮定が十分に妥当し、換言すれば、本解析のコーディングの検証(Verification)ができたことを意味している。

(3) 高透水性供試体の解析結果

Full-formulationによる解析結果として、間隙水の土骨格に対する相対速度、間隙水圧、比体積の各分布の推移をそれぞれ図-8、図-9、図-10に示す。図-8より、供試体内では間隙水の動的なmigrationが生じていることがわかる。このような供試体内での動的浸透現象は、透水係数が極

めて大きいために生じるものである。このとき、間隙水圧は図-9のように要素内で常に均一に分布する。これは、透水係数が大きい場合には水のmigrationが直ちに起こるため、供試体の非一様変形により生じる動水勾配が即時的に解消されることによる。一方、図-10に示す比体積分布は時間の経過とともに大きくなる。これは、動的に運動する間隙水が供試体内を駆け巡ることにより、たとえ供試体全体の体積は一定であっても、各エレメントは排水と吸水、膨張と圧縮を繰り返すためである。なお、この計算をu-p formulationで行った場合、計算を実行することができなかった。この理由は、透水係数が大きい場合には、時空間離散化された水～土骨格連成式が「土骨格の圧縮/膨張に対応して間隙水の吸水/排水が生じる」という質量保存則に適合しない条件を与えるためである。

5. おわりに

本研究では、Full-formulationに基づく水～土骨格連成弾塑性有限変形解析手法を開発し、u-p formulationによっては解くことのできない極めて透水性の高い材料の二相系解析が可能となることを示した。また、液相速度を直接求めるFull-formulationでは、土中の間隙水のmigrationの様子を直接観察できることを示した。今後は地震時の動的挙動の解明のほか、土構造物への津波の衝突や洗掘現象、河床の掃流現象、海底液状化といった、水との動的相互作用問題を視野に入れつつ検討してゆく。

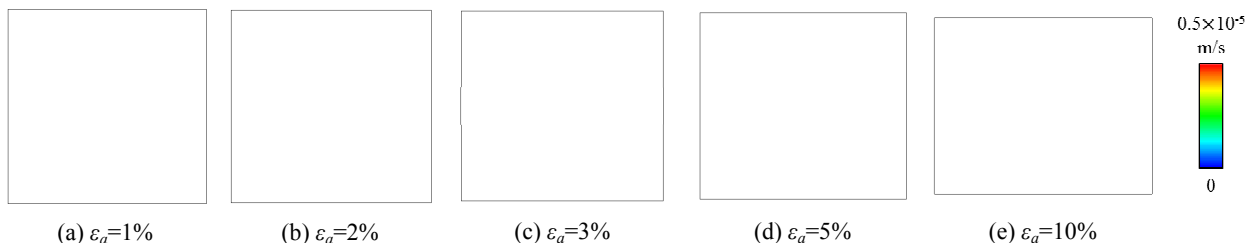


図-5 間隙水の相対速度分布 ($k=10^{-7}\text{cm/s}$)

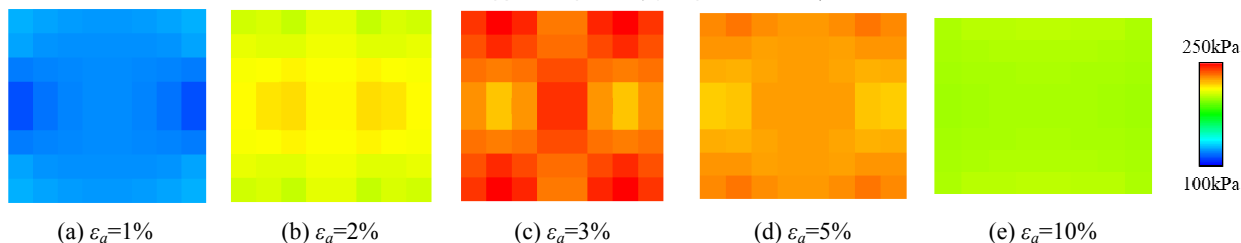


図-6 間隙水圧分布 ($k=10^{-7}\text{cm/s}$)

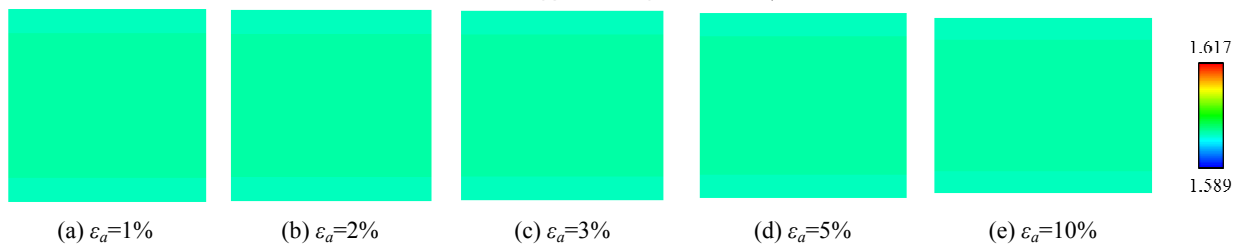


図-7 比体積分布 ($k=10^{-7}\text{cm/s}$)

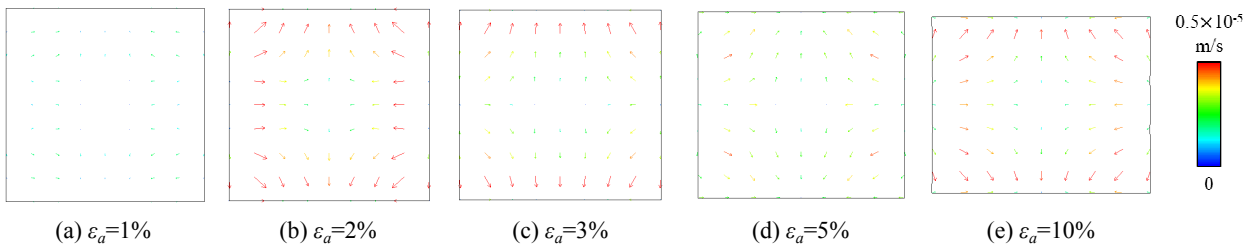


図-8 間隙水の相対速度分布 ($k=10^3\text{cm/s}$)

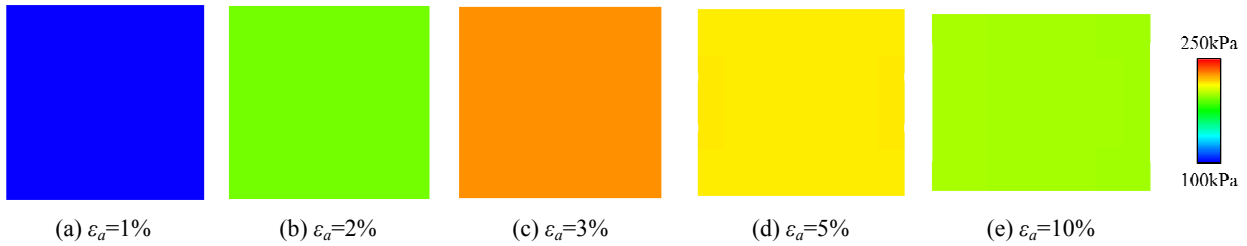


図-9 間隙水圧分布 ($k=10^3\text{cm/s}$)

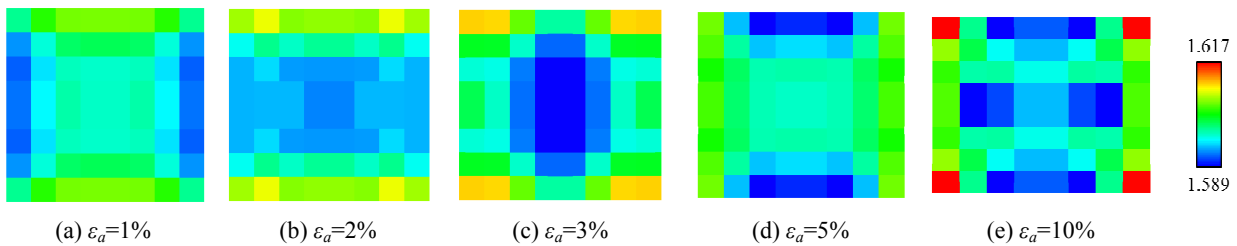


図-10 比体積分布 ($k=10^3\text{cm/s}$)

参考文献

- [1] M. A. Biot.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low-frequency range, *Journal of Acoustic Society of America*, Vol.28, No.2, pp.168-178, 1956.
- [2] O. C. Zienkiewicz., A. H. C. Chan., M. Pastor., B. A. Schrefler., T. Shiomi.: Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering, John Wiley & Sons, pp.29-30, 1999.
- [3] Noda, T., Asaoka, A., Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.48, No.6, pp.771-790, 2008.
- [4] Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- [5] Christian, J. T.: Undrained stress distribution by numerical method, *Proceedings of ASCE*, Vol.94, SM6, pp.1331-1345, 1968.
- [6] 赤井浩一, 田村武: 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文集, Vol.269, pp.95-104, 1978.
- [7] Asaoka, A., Nakano, M., Noda, T.: Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol.34, No.1, pp.91-106, 1994.
- [8] Asaoka, A., Noda, T., Yamada, E., Kaneda, K., Nakano, M.: An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils, *Soils and Foundations*, Vol.42, No.5, pp.45-57, 2002.
- [9] Green, A. E. and Naghdi, P. M.: A general theory of elasto-plastic continuum, *ARCH RATION MECH ANAL.*, Vol.18, pp.251-281.
- [10] 西村直志: 地盤工学ハンドブック 第3章土質力学, (社)地盤工学会, pp.51-64, 1999.
- [11] Noda, T., Binbin, Xu., Asaoka, A.: Realization of uniform deformation of soil specimen under undrained plane strain condition based on soil-water coupled finite deformation analysis considering inertia forces, *Soils and Foundations*, Vol.53, No.6, pp.937-950, 2013.