

高透水性矩形土供試体の平面ひずみ圧縮試験に対する
 $u-U-p$ 水～土骨格連成有限変形シミュレーション
 $u-U-p$ formulation-based Soil-Water Coupled Finite Deformation Simulation
on Plane-Strain Compression Test of Rectangular High-Permeable Soil Specimen

豊田智大¹, 野田利弘²

1 名古屋大学大学院・工学研究科社会基盤工学専攻・toyoda.tomohiro@i.mbox.nagoya-u.ac.jp

2 名古屋大学・減災連携研究センター

概 要

混合体理論に基づく飽和土の力学においては、場の未知数として固相の変位 u 、液相の変位 U 、間隙水圧 p を独立変数にとり、これらを各相の運動方程式を質量保存則と連立して解く。このような定式化は $u-U-p$ formulation (Full-formulation) と呼ばれる。一方、水～土骨格連成有限変形解析コードである **GEOASIA** は、上記の厳密な定式化に「液相の固相に対する相対加速度が固相の加速度に対して非常に小さい」という近似を導入して元の数を減らした $u-p$ formulation により定式化されている。この仮定により計算コストは削減されるが、間隙水の動的浸透を無視することになるため、極めて透水性の高い地盤材料への適用は困難であった。本稿では、**GEOASIA** を $u-U-p$ formulation に基づいて再定式化し、厳密な支配方程式群を解くことで、極めて透水性の高い材料の解析が可能となることを示した。

キーワード： $u-U-p$ formulation (Full-formulation), 水～土骨格連成有限変形解析, 高透水性材料

1. はじめに

名古屋大学地盤力学グループにより開発されてきた地盤の動的/静的水～土骨格連成有限変形解析コード **GEOASIA**¹⁾ は、 $u-p$ formulation と呼ばれる方法に基づいて定式化されている。この手法は、飽和土の運動を記述する未知変数に固相変位 u と間隙水圧 p をとるものであり、定式化に際しては「液相の固相に対する相対加速度が固相の加速度に対して極めて小さい」という近似が導入される。この近似は、浸透が十分に静的であると看做すことのできる細粒土の連成解析においては十分に妥当する。しかし、粗粒土を扱う場合、材料内での浸透現象は動的に生じうるため、上記の仮定を導入した $u-p$ formulation により解析しようとすれば、計算が破綻することとなる。すなわち、 $u-p$ formulation は、動的浸透を考慮した連成解析が出来ないという点において透水係数上の制約を有しているといえる。そこで筆者らは、この制約を取り除くため、固相変位 u と間隙水圧 p に加え、新たに液相変位 U を未知変数にとる $u-U-p$ formulation^{2), 3)} に基づく連成解析手法を定式化し、これを **GEOASIA** に搭載することで、動的浸透を考慮可能な高性能連成解析手法の開発に取り組んできた。本稿では、透水係数が極めて大きい材料を対象とした平面ひずみ矩形供試体の圧縮試験の解析事例について報告する。

2. 定式化手法の概要

GEOASIA は、速度型で記述された運動方程式の updated Lagrange 法に基づく時間積分により飽和土の変形を解く。これを $u-U-p$ formulation に拡張するため、固相速度 v_s 、液相速度 v_f 、間隙水圧 p の3つを未知変数にとり、これらを求めるため、以下の3つの支配方程式を定式化した。

混合体 (飽和土) の速度型運動方程式

$$\rho_s D_s^2 v_s + \rho_f D_s D_f v_f + \rho^f \left\{ (\text{tr} D_s) + \frac{n}{K_f} (D_s p) \right\} (D_f v_f - b) = \text{div}(D_s s_t) \quad (1)$$

液相の運動方程式 (液相加速度を考慮した Darcy 則)

$$\rho^f D_f v_f = -\gamma_w \text{grad} h - \gamma_w \left(\frac{\rho^f g}{\gamma_w} - 1 \right) e_3 - \frac{\gamma_w}{k} n (v_f - v_s) \quad (2)$$

水～土骨格連成式 (飽和土の質量保存則)

$$\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \text{div}(D_f v_f) - \text{div} w_s + \text{div}(k \text{grad} h) - \frac{n}{K_f} \rho^f (D_s p) = 0 \quad (3)$$

ここに、 D_s 、 D_f はそれぞれ固相、液相にからみた物質時間微分作用素、 ρ_s 、 ρ_f 、 ρ^f はそれぞれ固相、液相、間隙水の密度、 D_s は固相の速度勾配テンソル、 n は間隙率、 K_f は間隙水の体積弾性率、 $b = -g e_3$ は物体力 (g は重力加速度、 e_3 は鉛直上向きの単位ベクトル)、 $D_s s_t$ は Yatomi et al.⁴⁾ の表記にしたがう公称応力速度、 γ_w は間隙水の単位体積重量、

h は全水頭, k は透水係数である。

u - U - p formulation では, 式(1)~(3)を一切の近似を導入することなく厳密に解く。構成式には土の骨格構造に着目した弾塑性構成モデル SYS Cam-clay model⁵⁾を搭載し, 客観性のある応力速度として Green-Naghdi rate を使用する。式(2)右辺第3項は固相が液相に及ぼす相互作用力(浸透力と等価な物体力)であるが, 西村⁶⁾にならい Hagen-Poiseuille 流れの類推により与えている。空間離散化は, 固相速度 v_s , 液相速度 v_f については1次の Iso-parametric 形状関数による FEM, 間隙水圧 p は Christian 流⁷⁾または田村流⁸⁾の物理モデルを拡張した FVM により行う。時間離散化は, 固相速度 v_s , 液相速度 v_f については各相の躍度(加加速度)に線形性を仮定する Wilson- θ 法, 間隙水圧 p は水圧速度に線形性を仮定する台形公式により行う。

次に, u - U - p formulation における固相と液相の観測の仕方について述べる。固相については, 一般の固体解析に倣い, 固相物質点 X_s を固定して Lagrange 的に観測する。

$$v_s = v_s(x_s(X_s, t), t) \quad (4)$$

一方, 液相については, 図1のように, ある時刻 t に固相物質点 X_s と同位置を占める液相物質点の速度を観測する。

$$v_f = v_f(x_s(X_s, t), t) \quad (5)$$

この観測の仕方は, Darcy 則に従う間隙水の相対平均流速 $v' = n(v_f - v_s)$ が「ある時刻に固相格子の上を相対的に通過してゆく水粒子の速度」であることを踏まえたものであり, (静的な) Darcy 則が客観性を有するための必要条件に相当する。本研究では, 支配方程式に含まれる液相加速度 $D_t v_f$ を固相から観測された液相加速度 $D_s v_f$ に変換した上で, 固相にのって Lagrange 的に時間積分を施すこととした。物質時間微分の変換公式は次式で与えられる。

$$D_s v_f = D_t v_f - \frac{\partial v_f}{\partial x} (v_f - v_s) \quad (6)$$

ここに右辺第2項は, v_f を観測する視点を液相から固相にのりかえる際に生じる相対速度分の移流項である。

3. 解析条件

矩形供試体の平面ひずみせん断試験の解析事例を行う。

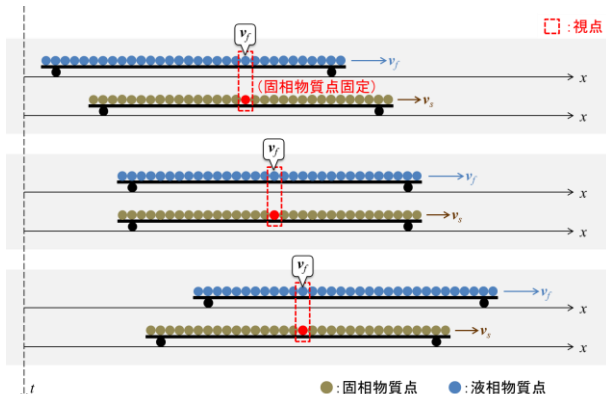


図1 Darcy 則が客観性を有するための液相速度の観測方法

3.1 境界条件

図2に示す形状・寸法の有限要素メッシュを用い, 平面ひずみ供試体を非排水条件下で鉛直方向に圧縮したときの土骨格の変形現象と供試体内で生じる間隙水の輸送現象(migration)を解く。このとき, 材料が不透水($k=0$)であれば供試体内での間隙水の migration は一切生じず, $v_f = v_s$ となり, 固相物質点と液相物質点は同じ空間配置 x を占めながら運動することとなる。

土骨格については, 上下端を一定の軸変位速度 10^3 m/s で変位させることにより圧縮する条件とした。この変位速度は, 土骨格ならびに間隙水の動的な影響が顕在化するほど極めて高速である。また, 上下端は剛で摩擦なしとした。本手法は慣性項を考慮した動的解析であるため, 摩擦がないこの条件でも, 高速载荷に伴う衝撃力を生じることによって, 矩形がそのまま保たれるような一様変形は示さず, 間隙水の migration が生じてよい条件となる⁹⁾。間隙水については, 4つの境界面をすべて非排水境界とすることで, 非排水試験に相当する条件を課した。ただし, 非排水条件を課したのは領域境界のみであり, 供試体内部での間隙水の migration は生じうる条件となっている。また, 載荷面垂直方向の液相変位速度は固相変位速度に一致させた。

3.2 材料条件

低透水性材料 ($k = 10^{-7}$ cm/s) ならびに高透水性材料 ($k = 10^3$ cm/s) を想定し, u - U - p formulation に基づく解析コードを用いて, 平面ひずみ圧縮試験の解析を行う。構成式には SYS Cam-Clay model を用いるが, 本稿では簡単のため, 構造・過圧密・異方性を有さない Cam-clay model として応答するように初期状態を与え, 典型的な弾塑性パラメータおよび物性値として表1に示す値を設定した。供試体には, 初期間隙水圧として背圧 -300kPa (負圧) を作用させており, これに対応する初期比体積として $v_0 = 2.17$ を与えた。また, 間隙水の圧縮性はないものとして計算を行った。また, 時間刻み幅は $\Delta t = 10^{-5}$ sec とした。

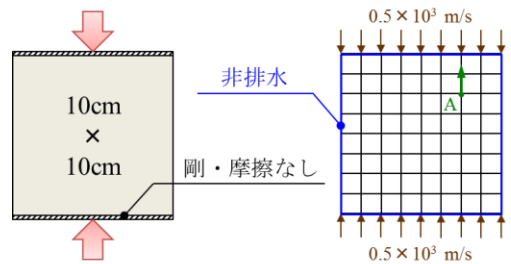


図2 解析条件

表1 材料定数

弾塑性パラメータ		物性値・初期条件	
圧縮指数 $\bar{\lambda}$	0.500	土粒子の密度 ρ^s (g/cm ³)	2.65
膨潤指数 $\bar{\kappa}$	0.040	間隙水の密度 ρ^f (g/cm ³)	1.00
NCLの切片 N	2.40	透水係数 k (cm/s)	10^{-7} or 10^3
限界状態定数 M	1.40	単位体積重量 γ_w (kN/m ³)	9.81
ポアソン比 ν	0.30	初期比体積 v_0	2.17

4. 解析結果

4.1 低透水性供試体の解析結果

透水係数を $k=10^{-7}\text{cm/s}$ とした場合について、 $u-U-p$ formulation 基づく解析結果を図 3, 図 4, 図 5 に示す。図 3 は液相の固相に対する相対速度 v_f-v_s の分布の推移である。相対流速がほとんど生じていないことから、水の migration はほとんど起こっていないことが確認できる。これは、材料の透水係数が極めて小さいことによるものである。また、図 5 に示される比体積の分布が時間の経過に伴ってほとんど変化しないことは、供試体内での間隙水の migration が起こらず、供試体を構成するいずれの要素も隣接要素と水のやりとりをしないことと対応している。これに対し、図 4 に示される間隙水圧の分布は供試体内で不均一に分布するが、これは、低透水性材料内では間隙水はほとんど輸送されないため、供試体の非一様変形により生じた水圧のばらつき（動水勾配）が一向に解消されないことによる。

4.2 高透水性供試体の解析結果

透水係数を $k=10^3\text{cm/s}$ とした場合について、 $u-U-p$ formulation 基づく解析結果を図 6, 図 7, 図 8 に示す。図 6 は相対速度 v_f-v_s の分布の推移であるが、間隙水が高透水性供試体内を動的に駆け巡る様子が確認できる。図 7 に示される間隙水圧の分布が一様であることは、供試体内の非一様変形により生じた動水勾配が高透水性材料中で直ちに解消されることと対応している。これに対し、図 8 に示される比体積の分布は時間経過に伴い大きく変化するが、これは供試体を構成する各要素が動的な水の運動に伴い排水・吸水を繰り返すことによる。図 8 に示される比体積の分布は時間経過に伴い大きく変化するが、これは、供試体を構成する各要素が動的な水の運動に伴い排水・吸水を繰り返すことによる。

るが、これは供試体を構成する各要素が動的な水の運動に伴い排水・吸水を繰り返すことによる。図 8 に示される比体積の分布は時間経過に伴い大きく変化するが、これは、供試体を構成する各要素が動的な水の運動に伴い排水・吸水を繰り返すことによる。

4.3 $u-U-p$ formulation の有効性に関する考察

$u-p$ formulation における「液相の固相に対する相対加速度は間隙水の加速度に対して十分に小さい」という仮定は、次式で表すことができる。

$$D_f v_f - D_s v_s \ll D_s v_s \quad (7)$$

この仮定が十分に成立するときには $u-p$ formulation による解析でも十分に妥当するが、これが成立しない場合には $u-p$ formulation によって正しく解析を行うことは困難となる。このことを確認するため、4.1 および 4.2 に示した解析について、図 2 中の節点 A における鉛直方向の液相の相対加速度ならびに固相の加速度を図 9 に示す。

4.1 の透水係数の小さい解析を $u-p$ formulation により実行した場合、紙幅の都合上詳細は割愛するが、 $u-U-p$ formulation とほとんど同じ実行結果が得られることを確認している。このことは、図 9(a)に示すように、液相の相対加速度が固相の加速度に対して十分に小さく、浸透現象が十分静的に生じていると見做すことができるため、 $u-p$ formulation における仮定が十分に妥当したことによる。このことは同時に、 $u-U-p$ formulation により $u-p$ formulation と同等の解析が可能であることを示している(Verification)。一方、4.2 の透水係数の大きい解析を $u-p$ formulation に

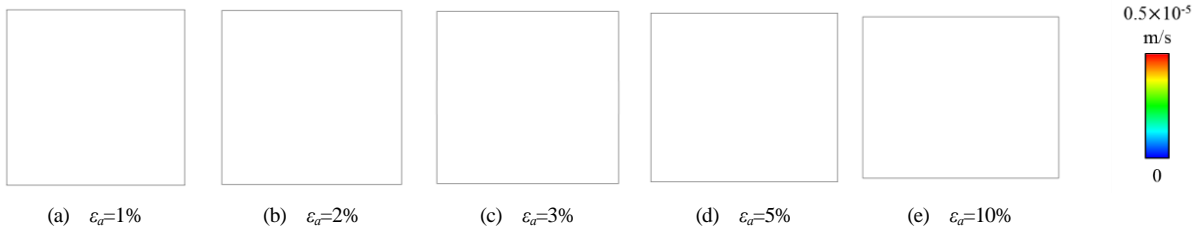


図 3 間隙水の相対速度分布 ($k=10^{-7}\text{cm/s}$)

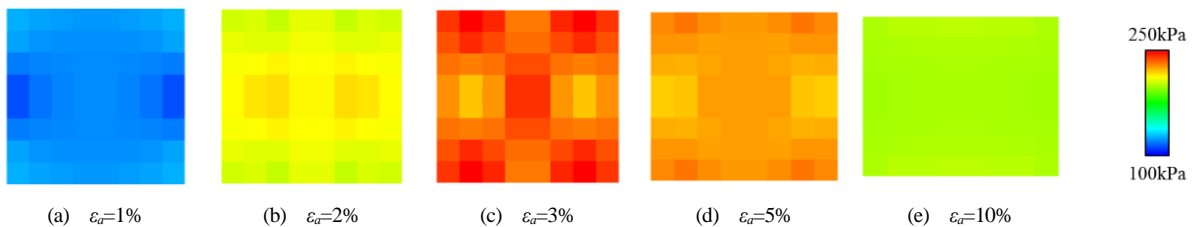


図 4 間隙水圧分布 ($k=10^{-7}\text{cm/s}$)

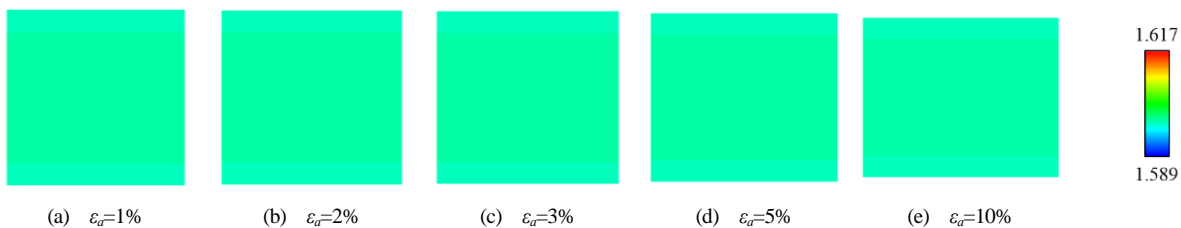


図 5 比体積分布 ($k=10^{-7}\text{cm/s}$)

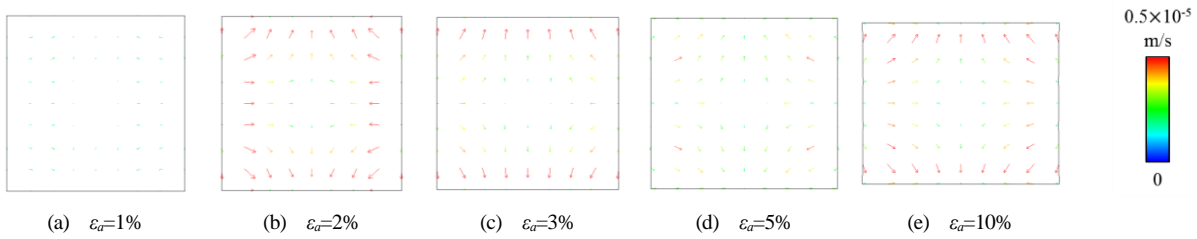


図 6 間隙水の相対速度分布 ($k=10^3\text{cm/s}$)

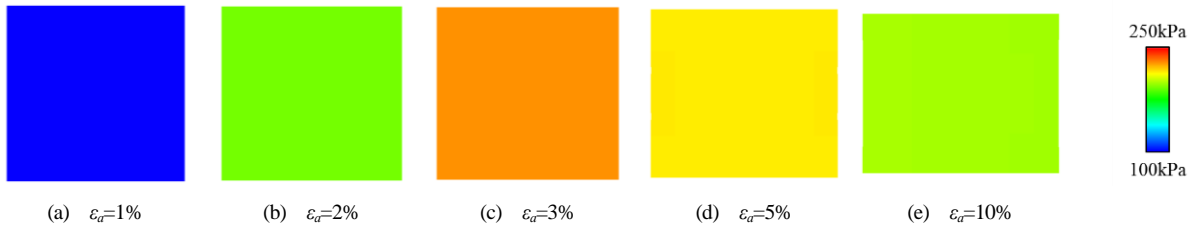


図 7 間隙水圧分布 ($k=10^3\text{cm/s}$)

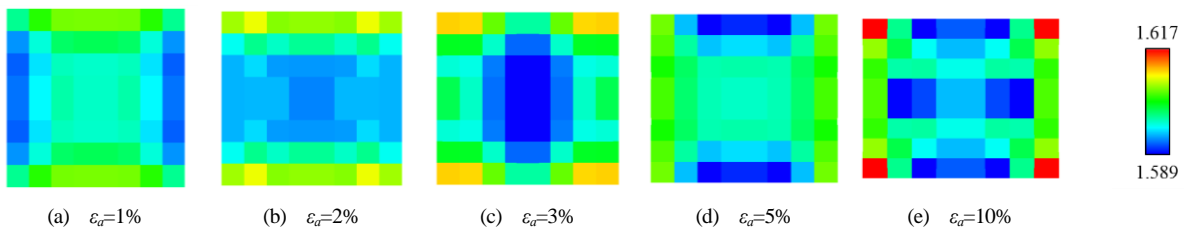
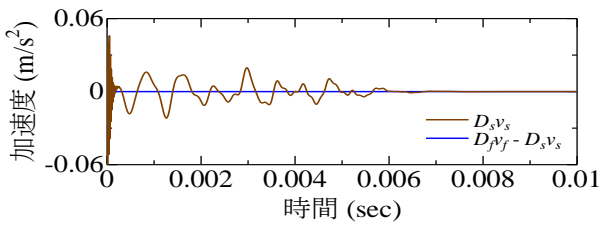
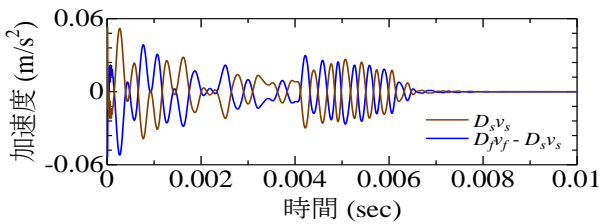


図 8 比体積分布 ($k=10^3\text{cm/s}$)



(a) 透水係数が小さい場合 ($k=10^7\text{cm/s}$)



(b) 透水係数が大きい場合 ($k=10^3\text{cm/s}$)

図 9 相対加速度 $D_p v_f - D_s v_s$ と固相加速度 $D_s v_s$ の比較

より実行しようとする、反復計算が収束せずに計算が破綻する。これは、供試体の変形中に図 9(b)のような、固相加速度と同程度のオーダーの相対加速度が生じるため、 $u-p$ formulation における仮定が妥当しなかったことを示唆している。言い換えれば、 $u-U-p$ formulation の導入により液相の動的浸透を考慮した解析が可能となり、透水性の大きい地盤材料を対象とした連成解析が可能となった。

5. おわりに

本稿では、 $u-U-p$ formulation に基づく水～土骨格連成弾塑性有限変形解析手法を開発し、平面ひずみ圧縮試験の解

析について、 $u-p$ formulation によっては解くことのできない極めて透水性の高い材料の連成解析が可能となることを示した。今後は地震時の動的挙動の解明のほか、土構造物への津波の衝突や洗掘現象、河床の掃流現象、海底液化といった、水との動的相互作用問題を視野に入れつつ検討してゆく。

参考文献

- 1) Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.48, No.6, pp.771-790, 2008.
- 2) M. A. Biot.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low-frequency range, *Journal of Acoustic Society of America*, Vol.28, No.2, pp.168-178, 1956.
- 3) O. C. Zienkiewicz., A. H. C. Chan., M. Pastor., B. A. Schrefler. and T. Shiomi.: Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering, John Wiley & Sons, pp.29-30, 1999.
- 4) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 5) Asaoka, A., Noda, T., Yamada, E., Kaneda, K. and Nakano, M.: An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils, *Soils and Foundations*, Vol.42, No.5, pp.45-57, 2002.
- 6) 西村直志: 地盤工学ハンドブック 第3章土質力学, (社)地盤工学会, pp.51-64, 1999.
- 7) Christian, J. T.: Undrained stress distribution by numerical method, *Proceedings of ASCE*, Vol.94, SM6, pp.1331-1345, 1968.
- 8) 赤井浩一, 田村武: 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文集, Vol.269, pp.95-104, 1978.
- 9) Noda, T., Binbin, Xu. and Asaoka, A.: Realization of uniform deformation of soil specimen under undrained plane strain condition based on soil-water coupled finite deformation analysis considering inertia forces, *Soils and Foundations*, Vol.53, No.6, pp.937-950, 2013.